Université Mohammed V **Année universitaire 2020/21**
Faculté des Sciences **Filière SMIA**
Rabat

Série n°1 de Mécanique du Point Matériel
Rappels et Compléments Mathématiques

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé direct $\Re(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs :

$\vec{V_1} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{V_2} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{V_3} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{V_4} = 2\vec{i} - \vec{k}$.

1. Représenter les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.
2. Calculer $\left\|\vec{V_1}\right\|$, $\left\|\vec{V_2}\right\|$ et les produits $\vec{V_1} . \vec{V_2}$ et $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$.
3. Calculer l'angle formé par les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.
4. Montrer que le vecteur $\vec{V_3}$ est perpendiculaire au plan (P) formé par les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.
5. Montrer que le vecteur $\vec{V_4}$ appartient au plan (P).
6. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur ($\vec{V_1} + \vec{V_2}$).
7. Calculer le produit mixte ($\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$) et montrer qu'il est invariant par permutation circulaire.

Exercice 2 :

On considère dans le plan xOy deux vecteurs unitaires perpendiculaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tournant autour de l'axe (Oz). Soit R(O,x,y,z) un repère muni de la base O.N.D (orthonormée directe) $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En posant $\theta = (\vec{Ox}, \vec{u})$, ($\theta = \omega t$, ω est une constante). Soit $\vec{r} = \cos(bt)\,\vec{i} + \sin(bt)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$ une fonction vectorielle et $\lambda(t) = e^{-at}$ une fonction scalaire (a et b sont des constantes)

1. Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. Déterminer le vecteur $\vec{w}$, tel que le système $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base O.N.D.

3. Calculer $\left.\frac{d\vec{u}}{d\theta}\right|_R$ et $\left.\frac{d\vec{v}}{d\theta}\right|_R$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ puis dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

4. Calculer $\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R$ et $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_R$. Les exprimer dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ puis dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

5. Calculer $\left.\frac{d(\lambda \vec{r})}{dt}\right|_R$ et $\left.\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt}\right|_R$ dans les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

<u>Exercice 3 :</u>

Considérons un repère orthonormé direct $\Re(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En tout point M(x,y,z) de l'espace, on définit une quantité physique f telle que : $f(x,y,z) = r^2$ avec $r = \left\|\vec{OM}\right\|$ et $\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

1. Calculer le gradient du champ scalaire f, $\vec{\text{grad}}f$, et la différentielle totale de f, df.

2. Montrer qu'en tout point M, $df = \vec{\text{grad}}f \, d\vec{OM}$ ($d\vec{OM}$ est le vecteur déplacement élémentaire)

3. Considérons le champ scalaire f, donné en tout point de l'espace par :

$$f(M) = 3r^3 \sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(2\varphi)$$

Exprimer $\vec{\text{grad}}f$ dans les bases sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ et cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

4. Soit une fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z)$ définie dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par :

$$\vec{f}(x,y,z) = x^2yz\,\vec{i} + xy^2z\,\vec{j} + z\,\vec{k},$$

Calculer $\text{div}\,\vec{f}$ et $\vec{\text{rot}}\,\vec{f}$.

<u>Exercice 4 :</u> <u>Champs de scalaires et de vecteurs</u>

1°) On considère le champ de scalaires $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + \frac{1}{3}z^3$.

a) Calculer $\overrightarrow{grad}\,f$.

b) En déduire les composantes du vecteur unitaire de la normale à la surface d'équation $x^2 - y^2 + \frac{1}{3}z^3 = cte$ au point M de coordonnées (1,-1,1).

2°) Soit un champ $\vec{E}$ de composantes $E_x = 2xz$, $E_y = 2yz$ et $E_z = x^2 + y^2$. Montrer que $\vec{E}$ est un champ de gradients. Calculer le potentiel V dont dérive ce champ.

Exercice 5 :
Soient x, y et z les coordonnées cartésiennes d'un point matériel M par rapport à un repère orthonormé direct $R(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $f(M)$ une fonction des trois coordonnées de M.

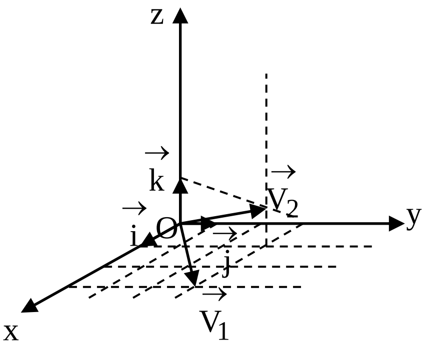
1) Exprimer la différentielle de $f(M)$ à l'aide des coordonnées cartésiennes de M puis, successivement à l'aide des coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) de M dans R et des coordonnées sphériques (r,θ,φ) de M dans R.

2) En exprimant le vecteur déplacement $\overrightarrow{dM}$ à l'aide des coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques de M respectivement et en utilisant la relation $df = \overrightarrow{grad}\, f . \overrightarrow{dM}$, déduire les composantes du vecteur $\overrightarrow{grad}\, f$ dans chacun de ces systèmes de coordonnées.

Corrigé de la série 1

Exercice 1 :

1.



2.

- $\left|\vec{v_1}\right| = \sqrt{3^2+3^2+0^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\left|\vec{v_2}\right| = \sqrt{1^2+3^2+1^2} = \sqrt{11}$
- $\vec{V_1}.\vec{V_2} = 3\times1+3\times3+0\times1 = 12$
- $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = (3\times1-0\times3)\,\vec{i} - (3\times1-0\times1)\,\vec{j} + (3\times3-3\times1)\,\vec{k} = 3\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$

3. Soit θ l'angle formé par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{V_1}.\vec{V_2}}{\left|\vec{V_1}\right|.\left|\vec{V_2}\right|}\right) = \arccos\left(\frac{12}{3\sqrt{2}\sqrt{11}}\right) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{22}}\right)$$

Ou bien $$\theta = \arcsin\left(\frac{\left|\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}\right|}{\left|\vec{V_1}\right|.\left|\vec{V_2}\right|}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{54}}{3\sqrt{2}\sqrt{11}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)$$

D'où : $\theta = 31.48°$

4. $$\left.\begin{array}{l} \vec{V_1}.\vec{V_3} = 3\times1-3\times1+0\times2 = 0 \\ \vec{V_2}.\vec{V_3} = 1\times1-3\times1+1\times2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{V_1}\perp\vec{V_3} \text{ et } \vec{V_2}\perp\vec{V_3} \Rightarrow \vec{V_3}\perp(P)$$

5. $\vec{V_4} = 2\,\vec{i} - \vec{k} = 3\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - \vec{i} - 3\,\vec{j} - \vec{k} = \vec{V_1} - \vec{V_2} \quad \Rightarrow \vec{V_4} \in (P)$

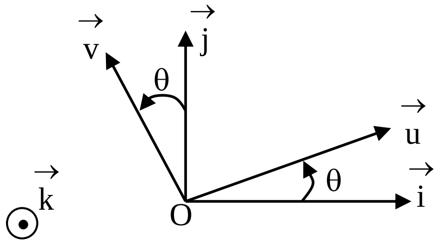
En plus : $\vec{V_4}.\vec{V_3} = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{V_4} \in (P)$

6. $\vec{U} = \dfrac{\vec{V_1} + \vec{V_2}}{\left|\vec{V_1} + \vec{V_2}\right|} = \dfrac{4\,\vec{i} + 6\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{53}} \quad \Rightarrow \quad \vec{U} = \dfrac{4}{\sqrt{53}}\,\vec{i} + \dfrac{6}{\sqrt{53}}\,\vec{j} + \dfrac{1}{\sqrt{53}}\,\vec{k}$

7. $$\left.\begin{array}{l} (\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}) = \vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = 18 \\ (\vec{V_2}, \vec{V_3}, \vec{V_1}) = \vec{V_2}.(\vec{V_3} \wedge \vec{V_1}) = 18 \\ (\vec{V_3}, \vec{V_1}, \vec{V_2}) = \vec{V_3}.(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}) = (\vec{V_2} . \vec{V_3}, \vec{V_1}) = (\vec{V_3} . \vec{V_1}, \vec{V_2})$$

D'où $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3})$ est invariant par permutation circulaire .

<u>Exercice 2</u> :



1. $\vec{u} = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j} \;, \quad \vec{v} = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j}$

2. Pour que le système $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base O. N. D., il faut que $\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{v}\right\| = \left\|\vec{w}\right\|$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$;

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (\cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j}\,) \wedge (-\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j}\,) = \vec{k} \quad \Rightarrow \vec{w} = \vec{k}$

3. $\left.\dfrac{d\vec{u}}{d\theta}\right|_R = \left.\dfrac{d(\cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j})}{d\theta}\right|_R = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j} = \vec{v}$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{d\theta}\right|_R = \left.\frac{d(-\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j})}{d\theta}\right|_R = -\cos(\theta)\,\vec{i} - \sin(\theta)\,\vec{j} = -\vec{u}$$

4. $\left.\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right|_R = \left.\dfrac{d(\cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j})}{dt}\right|_R = -\dot{\theta}\sin(\theta)\,\vec{i} + \dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{j} = \dot{\theta}\,\vec{v} = \omega\,\vec{v}$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(-\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j})}{dt}\right|_R = -\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{i} - \dot{\theta}\sin(\theta)\,\vec{j} = -\dot{\theta}\,\vec{u} = -\omega\,\vec{u}$$

5. $\left.\dfrac{d(\lambda\,\vec{r})}{dt}\right|_R = \lambda\left.\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|_R + \vec{r}\left.\dfrac{d\lambda}{dt}\right|_R$

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R = -b\sin(bt)\,\vec{i} + b\cos(bt)\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}; \qquad \frac{d\lambda}{dt} = -ae^{-at}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{d(\lambda\,\vec{r})}{dt}\right|_R = e^{-at}[(-b\sin(bt) - a\mathrm{co}(bt))\,\vec{i} + (b\cos(bt) - a\sin(bt))\,\vec{j} + (2t - at^2)\,\vec{k}]$$

$$\left.\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{r})}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R \wedge \vec{r} + \vec{u}\wedge\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R \wedge \vec{r} = (-\omega\sin(\theta)\,\vec{i} + \omega\cos(\theta)\,\vec{j}) \wedge (\cos(bt)\,\vec{i} + \sin(bt)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k})$$

$$= -\omega\sin(\theta)\sin(bt)\,\vec{k} + \omega t^2\cos(\theta)\,\vec{j} - \omega\cos(\theta)(\cos(bt)\,\vec{k} + \omega t^2\cos(\theta)\,\vec{i}$$

$$= \omega t^2\cos(\theta)\,\vec{i} + \omega t^2\sin(\theta)\,\vec{j} - \omega(\sin(\theta)\sin(bt) + \cos(\theta)(\cos(bt))\,\vec{k}$$

$$\left.\vec{u}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R = (\cos(\theta)\,\vec{i}+\sin(\theta)\,\vec{j})\wedge(-b\sin(bt)\,\vec{i}+b\cos(bt)\,\vec{j}+2t\,\vec{k})$$

$$= b\cos(\theta)\cos(bt)\,\vec{k}-2t\cos(\theta)\,\vec{j}+b\sin(\theta)\sin(bt)\,\vec{k}+2t\sin(\theta)\,\vec{i}$$

$$=2t\sin(\theta)\,\vec{i}-2t\cos(\theta)\,\vec{j}+b(\cos(\theta)\cos(bt)+\sin(\theta)\sin(bt))\,\vec{k}$$

$$\left.\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{r})}{dt}\right|_R = \omega t^2\cos(\theta)\,\vec{i}+\omega t^2\sin(\theta)\,\vec{j}-(\omega\sin(\theta)\sin(bt)+\omega\cos(\theta)\cos(bt)\,\vec{k}$$

$$+2t\sin(\theta)\,\vec{i}-2t\cos(\theta)\,\vec{j}+b\sin(\theta)\sin(bt)\,\vec{k}$$

$$=(\omega t^2\cos(\theta)+2t\sin(\theta))\,\vec{i}+(\omega t^2\sin(\theta)-2t\cos(\theta))\,\vec{j}+(b-\omega)\cos(\theta-bt)\,\vec{k}$$

Pour exprimer les dérivées $\left.\frac{d(\lambda\,\vec{r})}{dt}\right|_R$ et $\left.\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{r})}{dt}\right|_R$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, il faut exprimer $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en fonction de la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 3.

1. $f(x,y,z)=r^2=x^2+y^2+z^2 \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\, f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\,;\ df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial f}{\partial z}=2z \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\, f=2x\,\vec{i}+2y\,\vec{j}+2z\,\vec{k},\ df=2xdx+2ydy+2zdz$

2.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\,;\ d\overrightarrow{OM}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\, f.d\overrightarrow{OM}=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=df$$

3. $\overrightarrow{\text{grad}}\, f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 9r^2 \sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(2\varphi) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 3r^3 \sin(2\varphi)(2\sin(\theta)\cos^2(\theta) - \sin^3(\theta))$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 6r^3 \sin^2(\theta)\cos(\theta)\cos(2\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, f = (9r^2 \sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(2\varphi))\,\vec{e}_r + 3r^2 \sin(2\varphi)(2\sin(\theta)\cos^2(\theta) - \sin^3(\theta))\,\vec{e}_\theta +$$
$$6r^2 \sin(\theta)\cos(\theta)\cos(2\varphi)\,\vec{e}_\varphi$$

En coordonnées cartésiennes, la fonction f est exprimée par : $f(r,\theta,\varphi) = 3r^3 \sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(2\varphi)$

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)\ , \quad y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)\ , \quad z = r\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad f(x,y,z) = 6xyz$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, f = 6yz\,\vec{i} + 6xz\,\vec{j} + 6xy\,\vec{k}$$

4.

$$\vec{f}(x,y,z) = x^2yz\,\vec{i} + xy^2z\,\vec{j} + z\,\vec{k} \quad \Rightarrow \quad f_x = x^2yz,\ f_y = xy^2z\ ,\ f_z = z$$

$$\text{div}\,\vec{f} = \vec{\nabla}.\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \text{div}\,\vec{f} = 2xyz + 2xyz + 1 = 4xyz + 1$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f} = -xy^2\,\vec{i} + x^2y\,\vec{j} + (y^2z - x^2z)\,\vec{k}$$

<u>Exercice 4.</u>

1- $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + \frac{1}{3}z^3$

a- $\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = 2x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$

b- En M(1,-1,1), $\overrightarrow{grad}\, f = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}$.

La différentielle totale de f(x,y,z) est : $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

Comme f(x,y,z)=cte, nous avons $df = \overrightarrow{\text{grad}}.d\overrightarrow{OM} = 0$.

$d\vec{OM}$ est // surface (S) correspondant à f(x,y,z)=0, donc $\vec{grad}\, f \perp$ (S).

Le vecteur unitaire normal à la surface de niveau est donc au point M :

$$\vec{n} = \frac{\vec{grad}\, f}{\left\| \vec{grad}\, f \right\|} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{3}$$

Pour que $\vec{E}$ soit un champ de gradients, il dit s'écrire sous la forme $\vec{E} = \vec{grad}\, V(x, y, z)$.

Soit g(x,y,z) une fonction quelconque, dérivable et continue en tout point (x,y,z), nous avons :

$$\vec{rot}(\vec{grad}\, g(x,y,z)) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})} \wedge \begin{cases} \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} \end{cases}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = \begin{cases} \frac{\partial^2 g(x,y,z)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 g(x,y,z)}{\partial z \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 g(x,y,z)}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 g(x,y,z)}{\partial x \partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 g(x,y,z)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g(x,y,z)}{\partial y \partial x} = 0 \end{cases}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = \vec{0}$$

Par conséquent, pour que $\vec{E} = \vec{grad}\, V(x, y, z)$, faut que $\vec{rot}\, \vec{E} = \vec{0}$.

$$\vec{rot}\, \vec{E} = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} \wedge \begin{cases} 2xz \\ 2yz \\ x^2 + y^2 \end{cases}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} \Rightarrow \vec{E} \text{ est un champ de gradients}$$

$$\vec{rot}\, \vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{grad}\, V(x, y, z)$$

Calculons V(x,y,z) dont dérive le champs $\vec{E}(x, y, z)$:

$$\vec{E}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = E_x = 2xz & (1) \\ \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} = E_y = 2yz & (2) \\ \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} = E_z = x^2 + y^2 & (1) \end{cases}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

(1) $\Rightarrow$ $V(x, y, z) = x^2 z + C(y, z)$ (4)

Remplacer l'équation (4) dans la (1) :

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}=\frac{\partial C(y,z)}{\partial y}=2yz \quad \Rightarrow \quad C(y,z)=y^2z+C_1(z) \quad \text{d'où} \quad V(x,y,z)=x^2z+y^2z+C_1(z) \qquad (5)$$

Remplacer l'équation (5) dans la (3) :

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}=x^2+y^2+\frac{dC_1(z)}{dz}=x^2+y^2 \quad \Rightarrow \quad C_1(z)=Cte=K \quad \text{d'où} \quad V(x,y,z)=z(x^2+y^2)+K$$

Exercice 5 :

1- $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$: coordonnées cartésiennes

$df=\frac{\partial f}{\partial \rho}d\rho+\frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}dz$: coordonnées cylindriques

$df=\frac{\partial f}{\partial r}dr+\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta+\frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi$: coordonnées sphériques

2- $d\vec{M}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$: coordonnées cartésiennes.

$d\vec{M}=d\rho\,\vec{e}_\rho+\rho d\varphi\,\vec{e}_\varphi+dz\,\vec{k}$: coordonnées cylindriques.

$d\vec{M}=dr\,\vec{e}_r+rd\theta\,\vec{e}_\theta+r\sin(\theta)d\varphi\,\vec{e}_\varphi$: coordonnées sphériques.

Coordonnées cartésiennes : $df=\overrightarrow{grad}\,f.d\vec{M} \Rightarrow \overrightarrow{grad}\,f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.

Coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{grad}\,f=A_\rho\,\vec{e}_\rho+A_\varphi\,\vec{e}_\varphi+A_z\,\vec{k}$.

$$df=\overrightarrow{grad}\,f.d\vec{M}=A_\rho d\rho+\rho A_\varphi d\varphi+A_z dz=\frac{\partial f}{\partial \rho}d\rho+\frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$\Rightarrow A_\rho=\frac{\partial f}{\partial \rho}\ ;\ A_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\ ;\ A_z=\frac{\partial f}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{grad}\,f=\frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Coordonnées sphériques : $\overrightarrow{grad}\,f=A_r\,\vec{e}_r+A_\theta\,\vec{e}_\theta+A_\varphi\,\vec{e}_\varphi$

$$df=\overrightarrow{grad}\,f.d\vec{M}=A_r dr+rA_\theta d\theta+(r\sin(\theta))A_\varphi d\varphi=\frac{\partial f}{\partial r}dr+\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta+\frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi$$

$$\Rightarrow A_r=\frac{\partial f}{\partial r}\ ;\ A_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\ ;\ A_\varphi=\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{grad}\,f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi.$$