Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année universitaire 2019/2020
Filière SMIA
Module M4

Evaluation 1 de mécanique du point matériel *(durée 1h30)*

Exercice 1 : *(12 points)*

Soient R(O,xyz) un référentiel absolu galiléen muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $R_1(O,x_1y_1z)$ un référentiel relatif muni de la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. Dans le plan horizontal (xOy), un cercle (C) rigide de rayon a et de centre c est maintenu fixe. L'origine O des repères R et R_1 est un point de la circonférence du cercle (C). Un anneau M de masse m est assujetti à se déplacer sans frottements sur le cercle (C). L'anneau M est repéré par : $\vec{OM} = 2a\sin\varphi\, \vec{e}_\rho$ où φ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{e}_\rho$, avec $0 < \varphi < \pi$.
L'anneau M est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur K et de longueur à vide a. L'autre extrémité du ressort est fixée au point 0. En plus de la force de rappel $\vec{F}$ exercée par le ressort, l'anneau M est soumis à la réaction $\vec{R}$ du cercle et à son propre poids $\vec{P}$. On désigne par $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{k})$ la base de Frenet (voir figure).

L'expression vectorielle de la réaction $\vec{R}$ sera exprimée dans la base $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{k})$ et tous les autres vecteurs doivent être exprimés dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

1°) Calculer le vecteur vitesse absolue $\vec{v}_a(M) = \vec{V}(M/R)$.

2°) En déduire les expressions des vecteurs tangent $\vec{\tau}$ et normal $\vec{n}$ à la trajectoire absolue au point M.

3°) Donner l'expression du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_1/R)$ de rotation du repère R_1 par rapport à R.

4°) a) Déterminer les vitesses relative $\vec{v}_r(M)$ et d'entraînement $\vec{v}_e(M)$.

b) Déterminer les accélérations relative $\vec{\gamma}_r(M)$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$ de M.

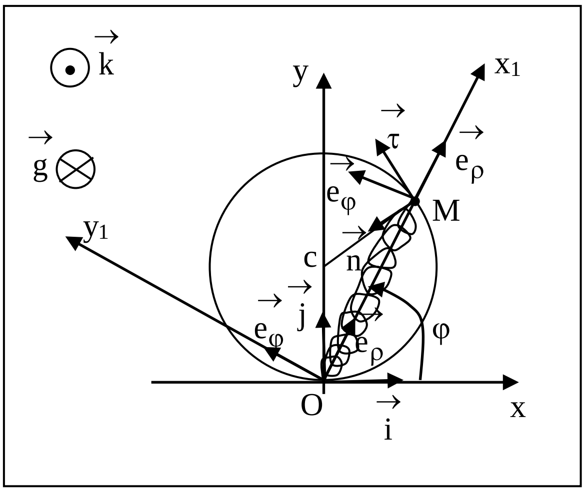
5°) Donner les expressions des forces appliquées au point M dans le repère relatif R_1.

6°) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué à M dans R_1.

7°) a) En projetant l'équation vectorielle obtenue par application du PFD (question 6) sur le vecteur $\vec{\tau}$, établir l'équation différentielle du mouvement de M.

b) Que devient cette équation différentielle pour les faibles valeurs de φ (on prendra sinφ=φ et cosφ=1) ?

8°) En projetant le PFD sur les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{k}$, trouver les composantes de la réaction $\vec{R}$.



Exercice 2 : *(8 points)*

Soient R(O,xyz) un référentiel orthonormé direct et galiléen, muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et M un point matériel de masse m. Le point M glisse <u>sans frottements</u> le long d'une tige (T), de longueur 4a (a > 0), qui tourne dans le plan horizontal (xOy) autour de son centre O avec une vitesse angulaire ω constante (l'angle de rotation est $\varphi = \omega t$, avec $\omega > 0$ et t désigne le temps). M est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$ et de la réaction de la tige $\vec{R}$, à une force $\vec{F} = F\vec{e}_\rho$. Dans ces conditions, le mouvement de M le long de la tige (T) suit la loi $\vec{OM} = a\sin(\omega t)\vec{e}_\rho$. On désigne par $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ la base directe cylindrique liée à la tige (voir figure 2).

Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

1) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ de M dans R en fonction de a, t et ω.

2) Déterminer le moment cinétique, $\vec{\sigma}_O(M/R)$, par rapport au point O de M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans le repère R.

3) Déterminer les moments dynamiques de chacune des forces agissant sur le point M.

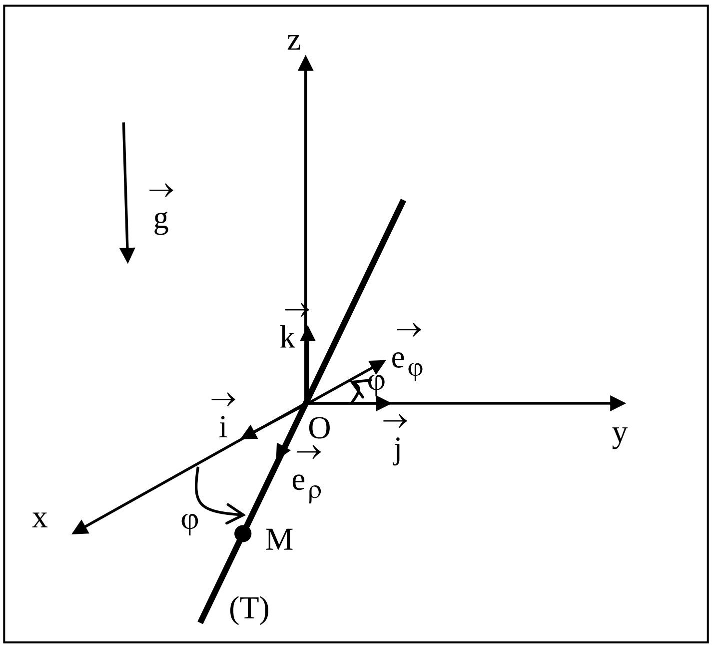
4) En appliquant le théorème du moment cinétique, trouvez les expressions des composantes de la réaction $\vec{R}$.

5) Déterminer l'énergie cinétique, $E_c(M/R)$, du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans le repère R.

6) Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.

7) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de la force F.

Figure 2



Corrigé de l'évaluation 1 (2019-2020)

Exercice 1 :

1°) Le vecteur vitesse absolue : $\vec{V}(M/R) = \left.\dfrac{d(2a\sin\varphi\,\vec{e}_\rho)}{dt}\right|_R = 2a\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_\rho + 2a\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$. **(0.5)**

$\left|\vec{V}(M/R)\right| = 2a\dot{\varphi}$

2°) $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{V}(M/R)}{\left|\vec{V}(M/R)\right|} = \cos\varphi\,\vec{e}_\rho + \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$. **(0.5)**

$\vec{n} = \vec{k}\wedge\vec{\tau} = -\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi$. **(0.5)**

3°) $\vec{\omega}(R_1/R) = \dot{\varphi}\,\vec{k}$. **(0.5)**

4°) a) $\vec{v}_r(M) = \left.\dfrac{d\,\vec{OM}}{dt}\right|_{R_1} = 2a\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_\rho$, **(0.5)**

$\vec{v}_e(M) = \vec{\omega}(R_1/R)\wedge\vec{OM} = \dot{\varphi}\,\vec{k}\wedge 2a\sin\varphi\,\vec{e}_\rho = 2a\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$. **(0.5)**

b) $\vec{\gamma}_r(M) = \left.\dfrac{d\,\vec{v}_r(M)}{dt}\right|_{R_1} = 2a(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\,\vec{e}_\rho$. **(0.5)**

$\vec{\gamma}_e(M) = \dfrac{d\,\vec{\omega}(R_1/R)}{dt}\wedge\vec{OM} + \vec{\omega}(R_1/R)\wedge(\vec{\omega}(R_1/R)\wedge\vec{OM}) = \ddot{\varphi}\,\vec{k}\wedge 2a\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\,\vec{k}\wedge 2a\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$.

$\vec{\gamma}_e(M) = -2a\dot{\varphi}^2\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + 2a\ddot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$. **(0.5)**

$\vec{\gamma}_c(M) = \vec{\omega}(R_1/R)\wedge\vec{v}_r(M) = 2\dot{\varphi}\,\vec{k}\wedge 2a\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_\rho = 4a\dot{\varphi}^2\cos\varphi\,\vec{e}_\varphi$. **(0.5)**

5°) Bilan des forces appliquées à M dans R_1 non galiléen :

- Forces réelles ou extérieures :

Poids de M : $\vec{P} = -mg\,\vec{k}$ **(0.5)**

Réaction du cercle sur M : $\vec{R} = R_\tau\,\vec{\tau} + R_n\,\vec{n} + R_z\,\vec{k} = R_n\,\vec{n} + R_z\,\vec{k}$ **(0.5)**

$R_\tau = 0$ car le point M se déplace sur le cercle sans frottements. **(0.5)**

Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -K(\ell-\ell_0)\,\vec{e}_\rho = -K(2a\sin\varphi - a)\,\vec{e}_\rho$ **(0.5)**

$\vec{F} = -Ka(2\sin\varphi - 1)\,\vec{e}_\rho$ **(0.5)**

- Forces d'inertie ou intérieures :

Force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_e = -m\,\vec{\gamma}_e(M) = 2am\dot{\varphi}^2\sin\varphi\,\vec{e}_\rho - 2am\ddot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$ **(0.5)**

Force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M) = -4am\dot{\varphi}^2 \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi$ **(0.5)**

6°) P.F.D. appliqué à M dans R_1 :

$$m\vec{\gamma}_r(M) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

$$2am(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi)\vec{e}_\rho = -mg\,\vec{k} + R_n\,\vec{n} + R_z\,\vec{k} - aK(2\sin\varphi - 1)\vec{e}_\rho + 2am\dot{\varphi}^2 \sin\varphi\,\vec{e}_\rho$$
$$-2am\ddot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi - 4am\dot{\varphi}^2 \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi$$ **(1)**

7°) a) Projection de l'équation vectorielle obtenue à la question 6 sur $\vec{\tau}$:

Nous avons : $\vec{\tau}.\vec{e}_\rho = \cos\varphi$, $\vec{\tau}.\vec{e}_\varphi = \sin\varphi$, $\vec{\tau}.\vec{k} = 0$ et $\vec{\tau}.\vec{n} = 0$:

D'où :
$$2am(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi)\cos\varphi = -aK(2\sin\varphi - 1)\cos\varphi + 2am\dot{\varphi}^2 \sin\varphi\cos\varphi$$
$$-2am\ddot{\varphi}\sin^2\varphi - 4am\dot{\varphi}^2 \cos\varphi\sin\varphi$$ **(1)**

Ce qui donne : $2am\ddot{\varphi} = -Ka(2\sin\varphi - 1)\cos\varphi \;\Rightarrow\; 2m\ddot{\varphi} = -K(2\sin\varphi - 1)\cos\varphi$

b) Dans le cas où φ est très faible (sinφ=φ et cosφ=1), nous avons : $\ddot{\varphi} + \frac{K}{m}\varphi = \frac{K}{2m}$. **(0.5)**

9) Projection sur $\vec{n}$:

Nous avons : $\vec{n}.\vec{e}_\rho = -\sin\varphi$, $\vec{n}.\vec{e}_\varphi = \cos\varphi$, $\vec{n}.\vec{k} = 0$ et $\vec{n}.\vec{n} = 1$:

$$2am(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi)(-\sin\varphi) = R_n + Ka(2\sin\varphi - 1)\sin\varphi - 2am\dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi$$
$$-2am\ddot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi - 4am\dot{\varphi}^2 \cos^2\varphi$$ **(1)**

$$R_n = 4am\dot{\varphi}^2 - Ka(2\sin\varphi - 1)\sin\varphi$$ **(0.5)**

Projection sur $\vec{k}$: $R_z = mg$. **(0.5)**

<u>Exercice 2 :</u>

1°) $\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = a\omega\cos(\omega t)\vec{e}_\rho + a\omega\sin(\omega t)\vec{e}_\varphi$ **(0.5)**

$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right|_R = 2a\omega^2[-\sin(\omega t)\vec{e}_\rho + \cos(\omega t)]\vec{e}_\varphi$ **(0.5)**

2°) $\vec{\sigma}_O(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/R) = a\sin(\omega t)\vec{e}_\rho \wedge m(a\omega\cos(\omega t)\vec{e}_\rho + a\omega\sin(\omega t)\vec{e}_\varphi) = ma^2\omega\sin^2(\omega t)\vec{k}$ **(1)**

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt}\right|_R = 2ma^2\omega^2\sin(\omega t)\cos(\omega t)\vec{k}$$ **(0.5)**

3°) Moments dynamiques :

$\vec{\delta}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge m\vec{F} = a\sin(\omega t)\vec{e}_\rho \wedge F\vec{e}_\rho = 0$ **(0.5)**

$\vec{\delta}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = a\sin(\omega t)\vec{e}_\rho \wedge (-mg)\vec{k} = amg\sin(\omega t)\vec{e}_\varphi$ **(0.5)**

$\vec{\delta}_O(\vec{R}) = \vec{OM} \wedge \vec{R} = a\sin(\omega t)\vec{e}_\rho \wedge (R_\varphi\vec{e}_\rho + R_z\vec{k}) = a\sin(\omega t)R_\varphi\vec{k} - a\sin(\omega t)R_z\vec{e}_\varphi = a\sin(\omega t)(-R_z\vec{e}_\varphi + R_\varphi\vec{k})$

(0.5)

4° Théorème du moment cinétique :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt}\right|_R = \vec{\delta}_O(\vec{F}) + \vec{\delta}_O(\vec{P}) + \vec{\delta}_O(\vec{R})$$

$\Rightarrow \quad 2ma^2\omega^2\sin(\omega t)\cos(\omega t)\vec{k} = a\sin(\omega t)((mg - R_z)\vec{e}_\varphi + R_\varphi\vec{k})$

$\Rightarrow \quad R_\varphi = 2ma\omega^2\cos(\omega t)$ **(0.5)**

$R_z = mg.$ **(0.5)**

5°) $E_c(M/R) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/R) = \frac{1}{2}m(a\omega)^2$ et $\frac{dE_c(M/R)}{dt} = 0.$ **(0.5)**

6°) **<u>Puissances :</u>**

$P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{V}(M/R) = F\vec{e}_\rho.(a\omega\cos(\omega t)\vec{e}_\rho + a\omega\sin(\omega t)\vec{e}_\varphi) = Fa\omega\cos(\omega t)$ **(0.5)**

$P(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{V}(M/R) = -mgF\vec{k}.(a\omega\cos(\omega t)\vec{e}_\rho + a\omega\sin(\omega t)\vec{e}_\varphi) = O$ **(0.5)**

$P(\vec{R}) = \vec{R}.\vec{V}(M/R) = (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k}).(a\omega\cos(\omega t)\vec{e}_\rho + a\omega\sin(\omega t)\vec{e}_\varphi)$ **(0.5)**

$P(\vec{R}) = R_\varphi a\omega\sin(\omega t) = 2ma^2\omega^2\cos(\omega t)\sin(\omega t).$ **(0.5)**

7°) **<u>Théorème de l'énergie cinétique :</u>**

$$\frac{dE_c(M/R)}{dt} = P(\vec{F}) + P(\vec{P}) + P(\vec{R})$$

$\Rightarrow \quad 0 = Fa\omega\cos(\omega t) + 2ma^2\omega^2\cos(\omega t)\sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad F = -2ma\omega^2\sin(\omega t)$ **(0.5)**