Université Mohammed V- Agdal | Année universitaire 2013/2014
Faculté des Sciences | Filière SMIA
Rabat | Module M4

Contrôle final de mécanique du point matériel

Exercice 1 : *(10 points)*

On considère un repère orthonormé galiléen fixe $R_1(O_1, XYZ)$ de base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Un tube **horizontal** (Δ) de longueur 2b tourne autour de son centre O avec une vitesse angulaire ω constante en ce déplaçant suivant l'axe $\vec{O_1Z}$ du repère R_1.

Soit $R(O, xyz)$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de telle sorte que le tube (Δ) soit confondu à tout instant avec l'axe $\vec{Ox}$. Le repère R est alors muni d'un mouvement de rotation autour de l'axe vertical $\vec{O_1Z}$, avec la vitesse angulaire ω, et d'un mouvement de translation suivant l'axe $\vec{O_1Z}$ du repère R_1 (voir figure 1). Cette translation est donnée par $\vec{O_1O} = b\sin(\omega t)\,\vec{k}$, où t désigne le temps.

Une bille ponctuelle B de masse m, lâchée sans vitesse initiale à une distance r_0 de O $(r_0 < b)$, peut se déplacer sans frottements dans le tube (Δ). A l'instant t, $OB(t) = r(t)$ est la distance entre le centre du tube et la bille B.

Tous les vecteurs seront exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du repère R.

1) Donner le bilan des forces exercées sur la bille B dans le repère R.
2) Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la bille B dans R.
3) Donner la projection orthogonale de l'équation vectorielle, obtenue à la question précédente, sur les trois axes du repère relatif R.
4) En déduire l'expression de r(t) ainsi que les composantes de la réaction du tube sur la bille en fonction du temps t.

Indications :

i) La solution de l'équation différentielle $\frac{d^2r(t)}{dt^2} - \omega^2 r(t) = 0$ est de la forme:

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}.$$

A et B sont des constantes réelles à déterminer à partir des conditions initiales.

ii) $Ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $Sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

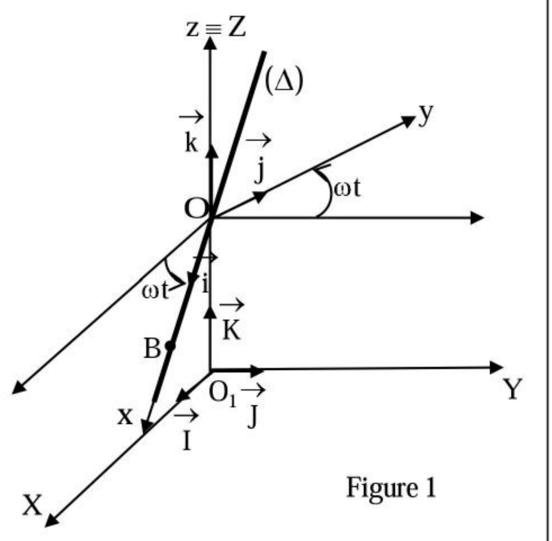

Figure 1

Tournez la page s.v.p.

Exercice 2 : *(10 points)*

Dans le plan (xOy) du repère orthonormé galiléen R(O,xyz), une particule M de masse m, repérée par ses coordonnées polaires (r,φ), est soumise à une force attractive du type $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e_r}$, où k est une constante positive. La base associée au système de coordonnées polaires est $(\vec{e_r},\vec{e_\varphi})$.

1) Par application du principe fondamental de la dynamique à la particule M dans le repère R, montrer que la trajectoire de cette particule est une conique dont l'équation polaire est $r = \frac{P}{1+e\cos\varphi}$. Préciser les valeurs du paramètre P et de l'excentricité e . L'axe polaire est supposé confondu avec l'axe focal de la conique.

Dans la suite de cet exercice, l'excentricité e de la conique considérée est telle que $0 < e < 1$.

2) La particule M décrit alors une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b (voir figure 2). Déterminer l'énergie potentielle E_p dont dérive la force $\vec{F}$.

3) Calculer le travail $\underset{A\to A'}{W(\vec{F})}$ de cette force quand la particule se déplace de la position A $(\varphi = 0)$ vers la position A' $(\varphi = \pi)$ en fonction de e, k et P.

4) Retrouver le travail $\underset{A\to A'}{W(\vec{F})}$ par application du théorème de l'énergie cinétique entre la position initiale A $(\varphi = 0)$ et la position finale A' $(\varphi = \pi)$.

5) Monter que l'énergie mécanique de M est constante.

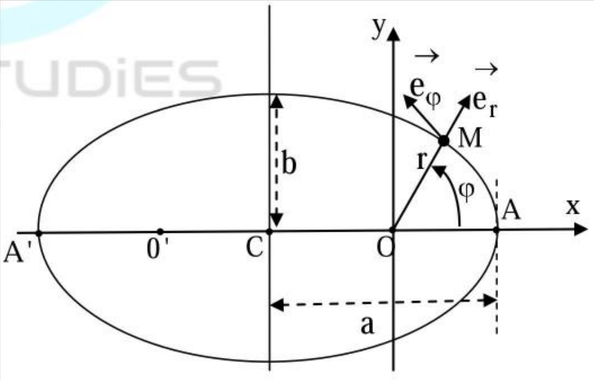

Figure 2

On donne :

- Première formule de Binet :

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right]$$

- Deuxième formule de Binet :

$$\gamma = -C^2u^2\left[\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) + u\right],$$

avec $u = \frac{1}{r}$ est l'inverse du rayon vecteur et C la constante des aires.