Université Mohammed V- Agdal
Faculté des Sciences
Rabat

Année universitaire 2012/2013
Filière SMIA
Module M4

Contrôle final de mécanique du point matériel *(durée 1h30mn)*

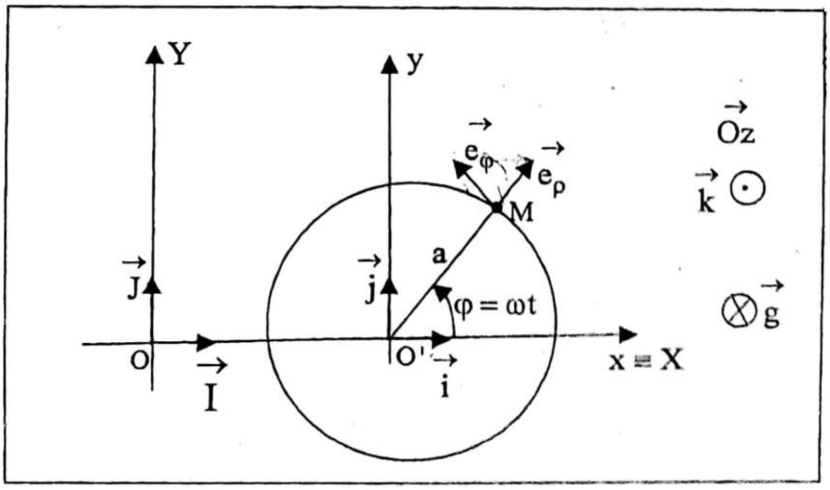
Exercice 1 : *(10 points)*

Dans le plan horizontal (XOY) du référentiel orthonormé galiléen $R_0(O,XYZ)$ de base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$, un cercle (C) rigide de centre O' et de rayon a se déplace suivant l'axe $\vec{OX}$ tel que $\vec{OO'} = 2a\cos\varphi\,\vec{I}$. a est une constante positive. Un point matériel M de masse m est mobile sur le cercle (C) avec une vitesse angulaire constante ω. M est repéré dans le référentiel relatif $R(O',xyz)$ lié au cercle par ses coordonnées polaires (ρ,φ). On désigne par $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la base cartésienne de R (voir figure 1). A l'instant initial $(t=0)$, les points O, O' et M sont alignés sur l'axe $\vec{OX}$. Le repère R est en translation par rapport à R_0.

Tous les vecteurs doivent être exprimés dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ associée au système de coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) du point M.

1) Donner l'expression du vecteur position $\vec{OM}$.
2) Exprimer les vecteurs vitesses relative $\vec{v}_r(M)$ et d'entraînement $\vec{v}_e(M)$ du point matériel M.
3) Exprimer les vecteurs accélérations relative $\vec{\gamma}_r(M)$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$.
4) Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule M dans le repère R. Projeter l'équation vectorielle obtenue suivant les vecteurs de la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$.
5) Etablir l'équation de la trajectoire de M dans le repère R_0. Préciser la nature de cette trajectoire

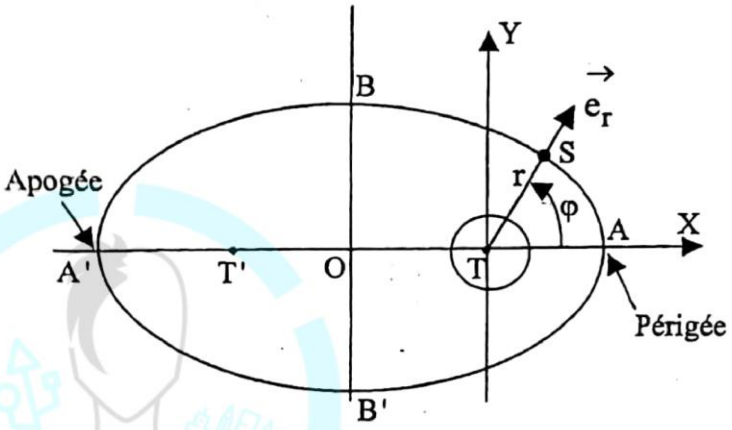
Figure 1



Tournez la page SVP

Exercice 2 : *(10 points)*

Dans le plan (XTY) du référentiel géocentrique galiléen R(T,XYZ) lié au centre T de la terre de masse M_T, un satellite S de masse m décrit une orbite elliptique de demi-grand axe a et de demi-petit axe b. Soient $a = A'O = OA$, $b = B'O = OB$ et $c = T'O = OT$ (voir figure 2). Le satellite n'est soumis qu'à la force newtonienne $\vec{F}$ d'attraction de la terre telle que $\vec{F} = -\dfrac{GmM_T}{r^2}\vec{e}_r$, où $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{TS}}{|\vec{TS}|}$, $r = |\vec{TS}|$ et G la constante universelle de gravitation.



1°) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à S dans R, trouver l'équation polaire de l'ellipse décrite par le satellite. Préciser son paramètre p et son excentricité e (on supposera que l'axe polaire $\vec{TX}$ est confondu avec l'axe focal de l'ellipse).

2°) Exprimer les altitudes minimale h et maximale H du satellite en fonction de l'excentricité e, du paramètre p et du rayon R_T de la terre.

3°) Montrer que la force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on déterminera (on prendra $E_p(\infty) = 0$).

4°) En utilisant la première formule de Binet, établir l'expression de l'énergie cinétique E_c du satellite.

5°) En déduire l'énergie mécanique E_m du satellite dans le référentiel géocentrique.

6°) Montrer que le moment cinétique $\vec{\sigma}_T(S/R)$, du satellite par rapport au point T dans R, est constant.

On donne :

Première formule de binet : $v^2 = C^2\left[\left(\dfrac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right]$

Deuxième formule de Binet : $\gamma = -C^2u^2\left[\left(\dfrac{d^2u}{d\varphi^2}\right) + u\right]$,

avec $u = \dfrac{1}{r}$ est l'inverse du rayon vecteur et C la constante des aires.