

Mécanique du Point Matériel

Mohamed EL KACIMI

Université Cadi Ayyad - Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2016/2017



Chapitre V : Mouvement dans un champ de force centrale

Sommaire

1. Introduction
2. Loi des aires
3. Equations du mouvement
4. Résolution de l'équation du mouvement
5. Equation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes
6. Retour aux lois de Kepler
7. Nature des orbites et conditions initiales
8. Satellites terrestres



Chapitre V : Mouvement dans un champ de force centrale

1. Introduction
2. Loi des aires
3. Equations du mouvement
4. Résolution de l'équation du mouvement
5. Equation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes
6. Retour aux lois de Kepler
7. Nature des orbites et conditions initiales
8. Satellites terrestres



Introduction

Nous allons traiter dans ce chapitre le mouvement d'un point matériel soumis à un champ de force centrale.

La force de gravitation fait partie de cette catégorie de forces. Son étude ainsi que celle du mouvement qui en résulte ont fait l'objet d'investigations très exhaustives et ont donné lieu à un développement d'outils mathématiques extraordinaire facilitant la description des mouvement des planètes, astres, comètes, ...

L'application aussi bien du PFD que des théorèmes généraux de la dynamique permettront de résoudre la trajectoire du mouvement. Nous énoncerons les lois de Kepler, qui, rappelons le, ont été publiées avant la construction du modèle mathématique qui décrit la gravitation. Ces lois ont été déduites à partir des observations expérimentales.



Définition



Définition

Si le support de la force résultante appliquée à un point matériel passe continuellement par un point fixe O , la force est dite centrale.



Remarques

On peut choisir judicieusement le point O comme origine du référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, xyz)$ dans lequel on étudie le mouvement, ce qui implique que le moment de la force par rapport à ce point est nul. On adoptera ce référentiel pour le reste de ce chapitre, sauf indication contraire.



Champ Newtonien

Considérons un point matériel M tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. M est en mouvement



$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r.$$

- Si $k > 0$, la force $\vec{F}$ est dirigée vers O , elle est attractive ;
- Si $k < 0$, la force $\vec{F}$ est dirigée dans le même sens que $\vec{e}_r$, elle est répulsive ;

Exemples :

- Force électrostatique : 2 charges électriques q_1 (en M_1) et q_2 (en M_2),

$$r = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| :$$

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$$

- Force gravitationnelle : 2 masses m_O (en O) et m_M (en M), $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$:

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = -G \frac{m_O m_M}{r^2} \vec{e}_r.$$



Force centrale et théorème du moment cinétique

Théorème du moment cinétique

Soit $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ le moment cinétique de M dans $\mathcal{R}$ par rapport à O . On a

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \implies \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \vec{c} \text{ t.e.}$$

Ainsi, nous déduisons



Le moment cinétique d'un système soumis à une force centrale est constant.

$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est un vecteur constant (en direction, en sens et en module) que l'on peut définir à partir des conditions initiales, c'est à dire

$$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\vec{V}_0$$

où M_0 et $\vec{V}_0$ sont respectivement la position et la vitesse de M à l'instant $t = 0$.



Force centrale et théorème du moment cinétique

Théorème du moment cinétique : conséquences

• Comme $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est constant, cela implique que $\overrightarrow{OM}$ est constamment perpendiculaire à $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$, ce qui veut dire que le point M se déplace dans le plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$.

• Seules deux coordonnées peuvent décrire le mouvement de M , étant donné, comme on vient de le voir, que M se déplace sur un plan. On choisit, de manière naturelle les coordonnées polaires (ρ, φ) .

• La vitesse de M est $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$. Le moment cinétique est égal à

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \\ &= m\rho\vec{e}_\rho \wedge (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) \\ &= m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k} = m\rho_0^2\dot{\varphi}_0\vec{k} = \sigma_0\vec{k}.\end{aligned}$$

où ρ_0 et $\dot{\varphi}_0$ sont évalués à l'instant initial $t = 0$.



Chapitre V : Mouvement dans un champ de force centrale

1. Introduction
2. Loi des aires
3. Equations du mouvement
4. Résolution de l'équation du mouvement
5. Equation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes
6. Retour aux lois de Kepler
7. Nature des orbites et conditions initiales
8. Satellites terrestres



Loi des aires

Considérons un déplacement infinitésimal de M tel que $\rho \rightarrow \rho + d\rho$ et $\varphi \rightarrow \varphi + d\varphi$, l'élément de surface engendré par ce déplacement peut être écrit comme

$$\delta S \simeq \delta S_a + \delta S_b = \frac{1}{2}\rho^2\delta\varphi + \frac{1}{2}\rho d\rho\delta\varphi$$

où δS_a est la surface d'une portion de disque d'angle $\delta\varphi$ et δS_b est la surface d'un triangle de côtés $d\rho$, $\rho d\varphi$ et $\overline{M(t)M(t+dt)}$.

Lorsque $\delta\rho \rightarrow 0$, $\delta S_b \rightarrow 0$ ce qui donne

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi.$$

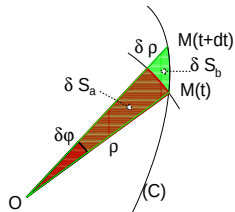


Figure: Surface élémentaire engendrée par un déplacement élémentaire de M .



Loi des aires

On sait que

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) &= m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k} = \sigma_0\vec{k} \\ \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= \text{cte} = \frac{\sigma_0}{2m} = A\end{aligned}$$

où A est appelée *la vitesse aréolaire*. Ainsi on peut énoncer la loi des aires, que l'on appelle aussi la deuxième loi de Kepler :



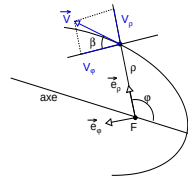
$$A = \frac{dS}{dt} = \frac{\sigma_0}{2m} \quad \text{donc} \quad S = At + \text{cte} = \frac{\sigma_0}{2m}t + \text{cte}.$$

• $\Rightarrow$ Les aires balayées pendant des intervalles de temps égaux sont égales.

La loi des aires peut être exprimée en fonction de la vitesse orthoradiale. Sachant que $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = V_r\vec{e}_\rho + V_\varphi\vec{e}_\varphi$ avec $V_\varphi = \rho\dot{\varphi}$,

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\rho V_\varphi \\ &= \frac{1}{2}\rho V \cos\beta = \frac{1}{2}\rho_0 V_0 \cos\beta_0\end{aligned}$$

où β est l'angle que forme le vecteur vitesse avec $\vec{e}_\varphi$.



Chapitre V : Mouvement dans un champ de force centrale

1. Introduction
2. Loi des aires
- 3. Equations du mouvement**
4. Résolution de l'équation du mouvement
5. Equation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes
6. Retour aux lois de Kepler
7. Nature des orbites et conditions initiales
8. Satellites terrestres



Equations du mouvement

PFD

$\mathcal{R}$ galiléen, le mouvement est plan alors l'accélération est donnée par

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} (\dot{\rho}\vec{e}_{\rho} + \rho\dot{\varphi}) \Big|_{\mathcal{R}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \vec{e}_{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \vec{e}_{\varphi}$$

et le PFD donne

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \Rightarrow -\frac{GMm}{\rho^2} \vec{e}_{\rho} = m [(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \vec{e}_{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \vec{e}_{\varphi}]$$

en projetant sur les axes polaires, on obtient les deux équations

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{\rho^2} = 0 \quad \text{et} \quad \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0$$

Si l'on reprend la deuxième équation et en la multipliant par ρ , on obtient

$$\rho^2\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (\rho^2\dot{\varphi}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\|\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})\|}{m} \right) = 0$$

puisque le moment cinétique est un vecteur constant. Aussi l'équation du mouvement est

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{\rho^2} = 0.$$



Equations du mouvement

Théorème de l'énergie mécanique

La force gravitationnelle étant conservative, l'énergie mécanique se conserve.

L'énergie mécanique est $E_m = E_c + E_p$ avec

$$\left. \begin{aligned} E_p &= -\frac{GMm}{\rho} \\ E_c &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{\rho}$$

Comme E_m se conserve, $dE_m/dt = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \dot{\rho}\ddot{\rho} + \rho\dot{\rho}\dot{\varphi}^2 + \rho^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{GM}{\rho^2}\dot{\rho} &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\rho}\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{\rho^2}\right) + (2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}^2 + \rho^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\rho}\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{\rho^2}\right) + \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{\rho^2} &= 0 \end{aligned}$$



Equations de la trajectoire $\rho(\varphi)$: Formules de Binet

1^{ère} Formule de Binet : Expression de la vitesse

On élimine $\dot{\varphi}$ de l'équation du mouvement :

$$\ddot{\rho} - \frac{\rho^4 \dot{\varphi}^2}{\rho^3} + \frac{GM}{\rho^2} = 0 \implies \ddot{\rho} - \frac{\sigma_0^2}{m^2} \frac{1}{\rho^3} + \frac{GM}{\rho^2} = 0$$

On procède au changement de variable $u = \frac{1}{\rho}$, sachant que $\dot{\varphi} = \frac{\sigma_0}{m\rho^2} = \frac{\sigma_0}{m} u^2 = Cu^2$ en posant $C = \frac{\sigma_0}{m}$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) = \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{u} \right) = Cu^2 \frac{d}{du} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{d\varphi} = Cu^2 \left(-\frac{1}{u^2} \right) \frac{du}{d\varphi} = -C \frac{du}{d\varphi}$$

et la dérivée seconde est donnée par

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -C \frac{d}{dt} \frac{du}{d\varphi} = -C \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{du}{d\varphi} \right) = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2}$$

ce qui donne pour la vitesse

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = -C \frac{du}{d\varphi} \vec{e}_\rho + Cu \vec{e}_\varphi.$$

$$\|\vec{V}(M/\mathcal{R})\| = C \sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2}$$

1^{ère} Formule de Binet.



Equations de la trajectoire $\rho(\varphi)$: Formules de Binet

2^{ème} Formule de Binet : Expression de l'accélération

On reprend l'expression de l'accélération en fonction de ρ et de ses dérivées et on procède aux changements adéquats

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \\ &= -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) \vec{e}_\rho + u \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \\ &= -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) \vec{e}_\rho\end{aligned}$$



$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) \vec{e}_\rho \quad \text{2^{ème} Formule de Binet.}$$



Chapitre V : Mouvement dans un champ de force centrale

1. Introduction
2. Loi des aires
3. Equations du mouvement
- 4. Résolution de l'équation du mouvement**
5. Equation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes
6. Retour aux lois de Kepler
7. Nature des orbites et conditions initiales
8. Satellites terrestres



Résolution de l'équation du mouvement : $u = u(\varphi)$

En procédant au changement de variable $u = 1/\rho$ et en substituant la dérivée seconde de ρ par rapport au temps par son expression en fonction de u et on part de l'équation établie auparavant

$$-GMm u^2 = -C^2 m u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right)$$

soit



$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{C^2}$$

équation différentielle de second ordre à coefficients constants et avec second membre dont la solution est



$$u(\varphi) = u_{sm}(\varphi) + u_{part}(\varphi) = a \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{GM}{C^2}$$



Résolution de l'équation du mouvement : $\rho = \rho(\varphi)$

Nature de la trajectoire

On sait que $\rho = \frac{1}{u}$, et en prenant $\varphi_0 = 0$, on obtient



$$\rho = \frac{\frac{C^2}{GM}}{1 + a \frac{C^2}{GM} \cos(\varphi)} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

L'équation obtenue est celle d'une conique de paramètre p et d'excentricité e qui seront fixés à partir des conditions initiales. L'origine du repère est le foyer de la conique,
 $\mathcal{R}(F, xyz) = \mathcal{R}(F, \rho, \varphi)$.

On rappelle que l'excentricité e fixe la nature de la conique comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} e = 0 & \rightarrow \text{la trajectoire est un cercle} \\ 0 < e < 1 & \rightarrow \text{la trajectoire est une ellipse} \\ e = 1 & \rightarrow \text{la trajectoire est une parabole} \\ e > 1 & \rightarrow \text{la trajectoire est une hyperbole} \end{array} \right.$$



Résolution de l'équation du mouvement : $\rho = \rho(\varphi)$

expression du paramètre p et de e :

• Expression de p :

p est fixée par la valeur du moment cinétique initiale, des masses et de la constante de



$$p = \frac{C^2}{GM} = \frac{\sigma_0^2}{GMm^2}$$

sachant que σ_0 est déterminé à partir de la position initiale et de la vitesse initiale comme suit $\sigma_0 = m\rho_0 V_0 \cos\beta_0$.

Expression de e

La valeur de e est fixée à partir de l'énergie mécanique initiale :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \right) - \frac{GMm}{\rho} \\ &= \frac{1}{2}m \left(C^2 \left(\frac{d}{d\varphi} \left[\frac{1}{\rho} \right] \right)^2 + C^2 \left[\frac{1}{\rho} \right]^2 \right) - GMm \left[\frac{1}{\rho} \right] \\ &= \frac{1}{2}mC^2 \left(\frac{1}{p^2} [-e \sin\varphi]^2 + \left[\frac{1 + 2e \cos\varphi + e^2 \cos^2\varphi}{p^2} \right] \right) - GMm \left[\frac{1 + e \cos\varphi}{p} \right] \\ &= \frac{mC^2}{2p^2} (1 + 2e \cos\varphi + e^2) - GMm \left[\frac{1 + e \cos\varphi}{p} \right] \end{aligned}$$



Résolution de l'équation du mouvement : $\rho = \rho(\varphi)$

expression du paramètre p et de e :

Expression de e : suite

Or

$$\frac{GM}{p} = \frac{C^2}{p^2}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{mC^2}{2p^2} (1 + 2e\cos\varphi + e^2 - 2 - 2e\cos\varphi) \\ &= \frac{GMm}{2p} (e^2 - 1). \end{aligned}$$

Comme E_m est conservée alors



$$E_m = E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{\rho_0} \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{2pE_0}{GMm}} = \sqrt{1 + \frac{pV_0^2}{GM} - \frac{2p}{\rho_0}}$$

Ainsi la connaissance de p et de e détermine complètement la nature de la conique.

Chapitre V : Mouvement dans un champ de force centrale

1. Introduction
2. Loi des aires
3. Equations du mouvement
4. Résolution de l'équation du mouvement
- 5. Equation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes**
6. Retour aux lois de Kepler
7. Nature des orbites et conditions initiales
8. Satellites terrestres



Coordonnées cartésiennes :

Origine au foyer : $\mathcal{R}(F, xyz) \rightarrow \mathcal{R}(C, XYZ)$

$$\begin{cases} \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ \rho &= p - e\rho\cos\theta = p - ex \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \rho^2 = (p - ex)^2 &\implies x^2 + y^2 = p^2 - 2epx + e^2x^2 \\ &\implies x^2(1 - e^2) + 2epx + y^2 = p^2 \\ &\implies x^2 + 2\frac{ep}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} \\ &\implies \left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} + \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} \\ &\implies \left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \end{aligned}$$

Procédons au changement de variable

$$\begin{cases} X &= x + \frac{ep}{1-e^2} \quad (e \neq 1) \\ Y &= y \end{cases} \implies \frac{X^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1$$



Coordonnées cartésiennes :

Mouvement circulaire : $e = 0$

Si l'excentricité $e = 0$, l'équation devient

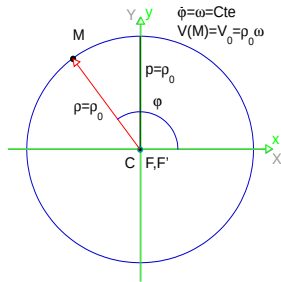
$$X^2 + Y^2 = p^2$$

qui est l'équation d'un cercle dans $\mathcal{R}'(C, XYZ)$ de centre C et de rayon p .

Remarques

- Centre du cercle $\equiv$ les foyers F et F' .
- $\rho = p = \text{Cte} = \rho_0$ puisque p est constante.
- $\dot{\phi} = \omega = (\text{Cte})$ et $V = V_0 = \rho_0 \omega$.
- $C = \sigma_0/m = \rho_0^2 \omega$. Or

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{C^2}{GM} = \frac{\rho_0^4 \omega^2}{GM} \\ p &= \rho_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\rho_0 V_0^2 = GM.}$$



Coordonnées cartésiennes :

Mouvement elliptique : $0 < e < 1$

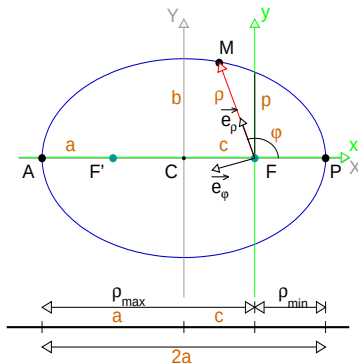
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = \frac{p}{1-e^2} \\ b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \end{cases}$$

CX : le demi-grand axe ($a > b$)

CY : le demi-petit axe

Rappelons que nous avons pris l'axe polaire comme origine des angles.

- $\rho(\varphi = 0) = \rho_{min}$, le périastre :
périgée → Mvt autour de la terre
péréhilie → Mvt autour du soleil.
- $\rho(\varphi = \pi) = \rho_{max}$, apoastre :
apogée → Mvt autour de la terre
aphélie → Mvt autour du soleil.



Coordonnées cartésiennes :

Mouvement elliptique : $0 < e < 1$

Partons de la relation de $\rho = \rho(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \rho_{min} &= \frac{p}{1+e} \\ \rho_{max} &= \frac{p}{1-e} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \frac{\rho_{max} \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}} \\ e = \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} a &= \rho_{min} + c \\ a &= \rho_{max} - c \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\rho_{max} + \rho_{min}}{2} \\ c = \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{2} \end{cases}$$

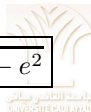
Récapitulons les résultats que l'on vient d'établir

ρ_{min}	$=$	$p/(1+e)$
ρ_{max}	$=$	$p/(1-e)$
a	$=$	$p/(1-e^2)$
b	$=$	$p/\sqrt{1-e^2}$
c	$=$	$ep/(1-e^2)$

Quant au centre de l'ellipse, sa distance au foyer peut s'exprimer comme

$$c = a - \rho_{min} = a - \frac{p}{1+e} = a - a \frac{1-e^2}{1+e} = a - a(1-e) \Rightarrow c = ea.$$

On a $|FM| + |F'M| = 2a \Rightarrow |FB| = a$ et $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = a\sqrt{1-e^2}$



Loi des aires et paramètres de l'ellipse :

On a établi précédemment que $dS = (C/2)dt$ que l'on peut intégrer. En prenant la constante d'intégration nulle, nous obtenons

$$S(t) = \frac{C}{2}t = \frac{\sigma_0}{2m}t.$$

Calculons la période T , dite sidérale (c'est l'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs de M devant une étoile fixe), pendant laquelle la surface de l'ellipse est balayée, sachant que la surface d'une ellipse est égale à πab :

$$\pi ab = \frac{C}{2}T \Rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{C}{ab}$$

Parfois la loi des aires de l'ellipse est mise sous la forme

$$S(t) = \pi ab \frac{t}{T}.$$

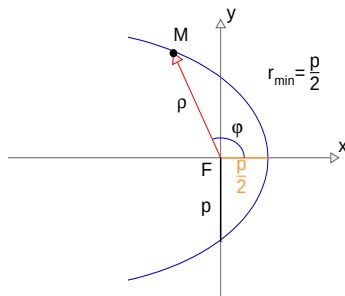


Mouvement parabolique : $e = 1$

Lorsque l'excentricité est égale à l'unité, $\rho_{\min} = \frac{p}{2}$, et c'est la distance entre le sommet de la parabole et le foyer F . De même, l'équation cartésienne dans $\mathcal{R}(F, xyz)$ est donnée par

$$y^2 + 2px = p^2$$

Ce mouvement ne représente pas un grand intérêt physique.



Mouvement hyperbolique : $e > 1$

L'équation du mouvement dans $\mathcal{R}'(C, XYZ)$ est

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = \frac{p}{(e^2 - 1)} \\ b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} \end{cases}$$

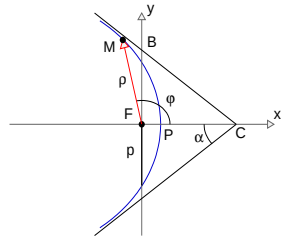
et d'asymptotes d'équations $Y = \pm \frac{a}{b} X$.

Pour $\rho_{min} = |FP|$, voir figure ci-contre, on a

$$\rho_{min} = \rho(\varphi = 0) = \frac{p}{1 + e}$$

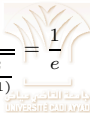
Quant à $c = |FC| = |FP| + |PC|$, ce qui donne

$$\begin{aligned} c &= \rho_{min} + a = \frac{p}{e + 1} + \frac{p}{e^2 - 1} \\ &= \frac{p + p(e - 1)}{e^2 - 1} = \frac{pe}{e^2 - 1}. \end{aligned}$$



Les asymptotes sont repérées par l'angle α tel que

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2}} \\ &= \frac{\frac{ep}{e^2 - 1}}{\sqrt{\frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2} + \frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)}}} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$



Chapitre V : Mouvement dans un champ de force centrale

1. Introduction
2. Loi des aires
3. Equations du mouvement
4. Résolution de l'équation du mouvement
5. Equation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes
- 6. Retour aux lois de Kepler**
7. Nature des orbites et conditions initiales
8. Satellites terrestres



Retour aux lois de Kepler

Première loi de Kepler : loi des orbites



Enoncé

Les planètes du système solaire décrivent des orbites elliptiques dont le soleil occupe l'un de ces foyers

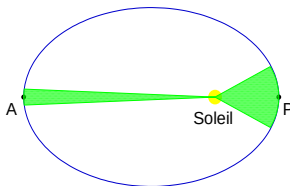
⇒ La force qui s'exerce entre le soleil et la planète est forcément portée par l'axe soleil-planète, et donc une force centrale.

Deuxième loi de Kepler : loi des aires



Enoncé

Les aires balayées par $\overrightarrow{SM}$ pendant deux intervalles de temps égaux sont égales.



⇒ La vitesse de la planète est d'autant plus grande que celle-ci se rapproche du soleil.

Retour aux lois de Kepler



Enoncé

Le carré de la période sidérale T d'une planète est directement proportionnelle au cube du demi-grand axe a de l'orbite elliptique de la planète

En reprenant la loi des aires exprimée en fonction de la période sidérale, d'une part, et en fonction de C , d'autre part, on en déduit que

$$\pi ab \frac{1}{T} = \frac{C}{2}$$

sachant que $p = C^2/GM = b^2/a$, nous obtenons

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2} = 4\pi^2 a^2 b^2 \frac{GM}{p} = 4\pi^2 a^2 b^2 GM \frac{a}{b^2} \\ &= 4\pi^2 GM a^3. \end{aligned}$$



$$T^2 = 4\pi^2 GM a^3.$$

Rappelons que Kepler a établi ces lois à partir de l'analyse de mesures !

Chapitre V : Mouvement dans un champ de force centrale

1. Introduction
2. Loi des aires
3. Equations du mouvement
4. Résolution de l'équation du mouvement
5. Equation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes
6. Retour aux lois de Kepler
- 7. Nature des orbites et conditions initiales**
8. Satellites terrestres



Nature des orbites et conditions initiales

Cas général : Axe de l'orbite ne coïncide pas avec l'axe polaire

On décrira la nature des orbites en fonction du rapport entre l'énergie cinétique et

l'énergie potentielle : $\xi = \frac{E_{0c}}{|E_{0p}|} = \frac{\rho_0 V_0^2}{2GM}$.

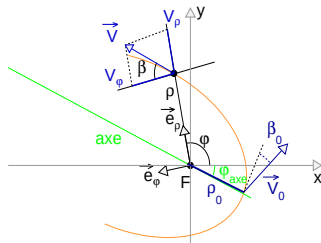
Relation entre φ_{axe} et β_0 :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_\rho}{V_\varphi} = \frac{\dot{\rho}}{\rho \dot{\varphi}} = \frac{1}{\rho} \left| \frac{d\rho}{d\varphi} \right| = \frac{|1 + e \cos \varphi|}{p} \frac{pe |\sin \varphi|}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \frac{e |\sin \varphi|}{|1 + e \cos \varphi|}$$

• expression de p :

$C = \rho_0 V_0 \cos \beta_0$ et $p = C^2 / GM$, ce qui donne

$$p = \frac{\rho_0^2 V_0^2 \cos^2 \beta_0}{GM} = 2\xi \rho_0 \cos^2 \beta_0.$$



Nature des orbites et conditions initiales

Cas général : Axe de l'orbite ne coïncide pas avec l'axe polaire

• Expression de φ_{axe}

$$\begin{cases} \rho_0 &= \frac{p}{1+e\cos\varphi_{axe}} \\ \text{tg}\beta_0 &= \frac{\rho_0}{p} e\sin\varphi_{axe} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e\cos\varphi_{axe} &= \frac{p}{\rho_0} - 1 \\ e\sin\varphi_{axe} &= \frac{p}{\rho_0} \text{tg}\beta_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{tg}\varphi_{axe} = \frac{\sin(2\beta_0)}{2\cos^2\beta_0 - \frac{GM}{2\rho_0 V_0^2}} = \frac{\sin(2\beta_0)}{2\cos^2\beta_0 - \frac{1}{\xi}}$$

• Expression de e^2

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2pE_{0m}}{GMm} = 1 + \frac{2p}{GMm} (E_{0c} - |E_{0p}|) = 1 + \frac{2p}{GMm} |E_{0p}| (\xi - 1) \\ &= 1 + \frac{2}{GMm} 2\xi\rho_0\cos^2\beta_0 \frac{GMm}{\rho_0} (\xi - 1) = 1 + 4\xi(\xi - 1)\cos^2\beta_0 \end{aligned}$$

Récapitulatif

$$\xi = \frac{E_{0c}}{|E_{0p}|} = \frac{\rho_0 V_0^2}{2GM}$$

$$p = 2\xi\rho_0\cos^2\beta_0$$

$$\text{tg}\varphi_{axe} = \frac{\sin(2\beta_0)}{2\cos^2\beta_0 - \frac{1}{\xi}}$$

$$e^2 = 1 + 4\xi(\xi - 1)\cos^2\beta_0$$

Chapitre V : Mouvement dans un champ de force centrale

1. Introduction
2. Loi des aires
3. Equations du mouvement
4. Résolution de l'équation du mouvement
5. Equation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes
6. Retour aux lois de Kepler
7. Nature des orbites et conditions initiales
8. **Satellites terrestres**



Satellites terrestres

Quelques approximations

- Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}(O, xyz)$, que l'on suppose galiléen ;
 - Seul l'effet de l'attraction terrestre est considéré. Soient M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la terre. Soit m la masse du satellite telle que $m \ll M_T$.
 - La terre est supposée sphérique, alors l'attraction gravitationnelle est indépendante de φ .
- Avec ces considérations, l'attraction de la terre sur le satellite peut se mettre sous la forme

$$\vec{F} = -\frac{GmM_T}{\rho^2}\vec{e}_\rho.$$

On fait l'étude en fonction ξ , avec $\beta_0 = 0$ et la nature de la conique est déterminée par $e = \sqrt{1 + 4\xi(\xi - 1)}$.



Satellites terrestres

Analyse de l'orbite du satellite

Le satellite ne doit pas chuter sur son point de lancement

$$\Rightarrow p \geq R_T \Rightarrow 2\xi\rho_0 \geq R_T \Rightarrow \rho_0^2 V_0^2 \geq GM_T R_T ;$$

En terme d'énergie cinétique et d'énergie potentielle



$$\frac{1}{2} m V_0^2 \geq \frac{1}{2} \frac{Gm_T}{\rho_0} \frac{R_T}{\rho_0} \Rightarrow E_{0c} \geq \frac{1}{2} |E_{0p}| \frac{R_T}{\rho_0}.$$

Vitesse de mise sur orbite circulaire : 1^{ère} vitesse cosmique

$$e^2 = 0 \Rightarrow \xi = \frac{1}{2} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{\rho_0}}$$

avec $g_0 = GM_T/R_T^2 \simeq 9.81 \text{ms}^{-2}$ et en notant la vitesse à communiquer au satellite par v_c , on a

$$v_c = \sqrt{g_0} \frac{R_T}{\sqrt{\rho_0}} \simeq 9.81 \frac{R_T}{\sqrt{\rho_0}} \simeq 9.81 \times \sqrt{R_T} = 7.9 \text{km s}^{-1} \text{ si } h \ll R_T$$

Vitesse de libération parabolique : $e^2=1$

$$1 + 4\xi(\xi - 1) = 1 \Rightarrow \xi = 1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2GM_T}{\rho_0}} \simeq \sqrt{2g_0} \frac{R_T}{\sqrt{\rho_0}}$$

Si on choisit le lancement à la surface de la terre, il faut

$$v_1 = \sqrt{2g_0 R_T} = \sqrt{2} v_c = 11.2 \text{km s}^{-1}.$$

