

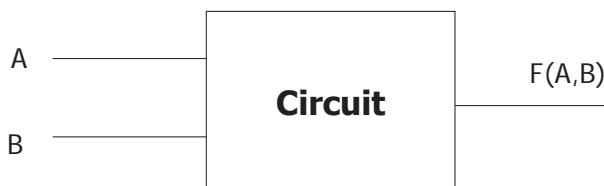
3. Algèbre de Boole

- Définition des variables et fonctions logiques
- Les opérateurs de base et les portes logiques .
- Les lois fondamentales de l'algèbre de Boole

103

I. Introduction

- Les machines numériques sont constituées d'un ensemble de circuits électroniques.
- Chaque circuit fournit une fonction logique bien déterminée (addition, comparaison ,....).



La fonction $F(A,B)$ peut être : la somme de A et B , ou le résultat de la comparaison de A et B ou une autre fonction

104

- Pour concevoir et réaliser ce circuit on doit avoir un modèle mathématique de la fonction réalisée par ce circuit .
- Ce modèle doit prendre en considération le système binaire.
- Le modèle mathématique utilisé est celui de Boole.

105

2. Algèbre de Boole

- George Boole est un mathématicien anglais (1815-1864).
- Il a fait des travaux dont lesquels les fonctions (expressions) sont constitués par des variables qui peuvent prendre les valeurs 'OUI' ou 'NON'.
- Ces travaux ont été utilisés pour faire l'étude des systèmes qui possèdent deux états s'exclus mutuellement :
 - Le système peut être uniquement dans deux états E1 et E2 tel que E1 est l'opposé de E2.
 - Le système ne peut pas être dans l'état E1 et E2 en même temps
- Ces travaux sont bien adaptés au Système binaire (0 et 1).

106

Exemple de systèmes à deux états

- Un interrupteur est ouvert ou non ouvert (fermé)
 - Une lampe est allumée ou non allumée (éteinte)
 - Une porte est ouverte ou non ouverte (fermée)

Remarque :

On peut utiliser les conventions suivantes :

QUI → VRAI (true)

NON → FAUX (false)

OUI → I (Niveau Haut)

NON \rightarrow 0 (Niveau Bas)

107

3. Définitions et conventions

Niveau logique : Lorsque on fait l'étude d'un système logique il faut bien préciser le niveau du travail.

Niveau	Logique positive	Logique négative
H (High) haut	1	0
L (Low) bas	0	1

Exemple :

Logique positive :

lampe allumée : 1

lampe éteinte : 0

Logique négative

lampe allumée : 0

lampe éteinte : 1

108

Variable logique (booléenne)

- Une variable logique (**booléenne**) est une variable qui peut prendre soit la valeur **0 ou 1**.
 - Généralement elle est exprimée par un seul caractère alphabétique en majuscule (**A , B , S , ...**)

- **Exemple :**

- Premier interrupteur ouvert : $I_1 = 1$
fermé : $I_1 = 0$

109

Fonction logique

- C'est une fonction qui **relie N variables logiques** avec un ensemble **d'opérateurs logiques** de base.
 - Dans l'Algèbre de Boole, il existe trois opérateurs de base : **NON , ET , OU**.
 - La valeur d'une fonction logique est **égale à 1 ou 0** selon les valeurs des variables logiques.
 - Si une fonction logique possède **N variables logiques** $\rightarrow 2^n$ combinaisons \rightarrow la fonction possède 2^n valeurs.
 - Les 2^n combinaisons sont représentées dans une table qui s'appelle **table de vérité (TV)**.

110

Exemple d'une fonction logique

$$F(A, B, C) = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C$$

La fonction possède 3 variables → 2^3 combinaisons

$$F(0,0,0) = \bar{0} \cdot \bar{0} \cdot 0 + \bar{0} \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot \bar{0} \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$F(0,0,1) = \bar{0} \cdot \bar{0} \cdot 1 + \bar{0} \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot \bar{0} \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 = 1$$

$$F(0,1,0) = \bar{0} \cdot 1 \cdot 0 + \bar{0} \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot \bar{1} \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$F(0,1,1) = \bar{0} \cdot 1 \cdot 1 + \bar{0} \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot \bar{1} \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$F(1,0,0) = 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$F(1,0,1) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 = 1$$

$$F(1,1,0) = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$F(1,1,1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Une table de vérité

111

4. Opérateurs logiques de base

NON (négation)

- **NON** : est un opérateur unaire (une seule variable) qui à pour rôle d'**inverser** la valeur d'une variable .

$$F(A) = \text{Non } A = \bar{A}$$

(lire : A barre)

A	\bar{A}
0	1
1	0

112

ET (AND)

- Le **ET** est un opérateur binaire (deux variables) , à pour rôle de réaliser le **Produit logique** entre **deux variables booléennes**.
- Le **ET** fait la **conjonction** entre deux variables.
- Le **ET** est défini par : $F(A,B) = A \cdot B$

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

113

OU (OR)

- Le **OU** est un opérateur binaire (deux variables) , à pour rôle de réaliser la **somme logique** entre **deux variables logiques**.
- Le **OU** fait la **disjonction** entre deux variables.
- Le **OU** est défini par $F(A,B) = A + B$ (il ne faut pas confondre avec la somme arithmétique)

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

114

Remarques

- Dans la définition des opérateurs ET , OU , nous avons juste donner la définition de base avec **deux variables logiques**.
- L'opérateur ET peut réaliser le produit de **plusieurs variables** logique (ex : A . B . C . D).
- L'opérateur OU peut aussi réaliser la somme logique de **plusieurs variables** logiques (ex :A + B + C +D).
- Dans une expression on peut aussi utiliser les **parenthèses**.

115

Précédence des opérateurs (priorité des opérateurs)

- Pour évaluer une expression logique (fonction logique) :
 - on commence par évaluer les sous expressions entre les **parenthèses**.
 - puis le **complément** (NON),
 - en suite le **produit** logique (ET)
 - enfin la **somme** logique (OU)

Exemple :

$$F(A, B, C) = (\overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot (C + B) + A \cdot \overline{B} \cdot C$$

si on veut calculer $F(0,1,1)$ alors :

$$F(0,1,1) = (\overline{0} \cdot \overline{1}) \cdot (1+1) + 0 \cdot \overline{1} \cdot 1$$

$$F(0,1,1) = (\overline{0}) \cdot (1) + 0 \cdot 0 \cdot 1$$

$$F(0,1,1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1$$

$$F(0,1,1) = 1 + 0$$

$$F(0,1,1) = 1$$

Exercice :

Trouver la table de vérité de la fonction précédente ?

116

Solution

- Pour trouver la table de vérité , il faut trouver la valeur de la fonction F pour chaque combinaisons des trois variables A, B , C
- 3 variables $\rightarrow 2^3 = 8$ combinaisons

$$F(A, B, C) = (\overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot (C + B) + A \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$F(0,0,0) = (\overline{0} \cdot \overline{0}) \cdot (0+0) + 0 \cdot \overline{0} \cdot 0 = 0$$

$$F(0,0,1) = (\overline{0} \cdot \overline{0}) \cdot (1+0) + 0 \cdot \overline{0} \cdot 1 = 1$$

$$F(0,1,0) = (\overline{0} \cdot 1) \cdot (0+1) + 0 \cdot \overline{1} \cdot 0 = 1$$

$$F(0,1,1) = (\overline{0} \cdot 1) \cdot (1+1) + 0 \cdot \overline{1} \cdot 1 = 1$$

$$F(1,0,0) = (\overline{1} \cdot \overline{0}) \cdot (0+0) + 1 \cdot \overline{0} \cdot 0 = 0$$

$$F(1,0,1) = (\overline{1} \cdot \overline{0}) \cdot (1+0) + 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 = 1$$

$$F(1,1,0) = (\overline{1} \cdot 1) \cdot (0+1) + 1 \cdot \overline{1} \cdot 0 = 0$$

$$F(1,1,1) = (\overline{1} \cdot 1) \cdot (1+1) + 1 \cdot \overline{1} \cdot 1 = 0$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

117

Lois fondamentales de l'Algèbre de Boole

•L'opérateur NON

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{A} + A = 1$$

$$\overline{A} \cdot A = 0$$

118

• L'opérateur ET

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$	Associativité
$A \cdot B = B \cdot A$	Commutativité
$A \cdot A = A$	Idempotence
$A \cdot 1 = A$	Elément neutre
$A \cdot 0 = 0$	Elément absorbant

119

• L'opérateur OU

$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$	Associativité
$A + B = B + A$	Commutativité
$A + A = A$	Idempotence
$A + 0 = A$	Elément neutre
$A + 1 = 1$	Elément absorbant

120

Distributivité

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C) \quad \text{Distributivité du ET sur le OU}$$
$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C) \quad \text{Distributivité du OU sur le ET}$$

Autres relations utiles

$$A + (A \cdot B) = A$$
$$A \cdot (A + B) = A$$
$$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$$
$$A + \overline{A} \cdot B = A + B$$

121

5. Dualité de l'algèbre de Boole

- Toute expression logique reste **vrais** si on remplace le ET par le OU , le OU par le ET , le 1 par 0 , le 0 par 1.
- Exemple :

$$A + 1 = 1 \rightarrow A \cdot 0 = 0$$

$$A + \overline{A} = 1 \rightarrow A \cdot \overline{A} = 0$$

122

6.Théorème de DE-MORGANE

- La **somme** logique **complimentée** de deux variables est égale au **produit** des **compléments** des deux variables.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

- Le **produit** logique **complimenté** de deux variables est égale au **somme** logique des **compléments** des deux variables.

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

123

Généralisation du Théorème DE-MORGANE à **N** variables

$$\overline{A \cdot B \cdot C \dots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \dots$$

$$\overline{A + B + C + \dots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \dots$$

124

7.Autres opérateurs logiques OU exclusif (XOR)

$$F(A, B) = A \oplus B$$

$$A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

125

NAND (NON ET)

$$F(A, B) = \overline{A \cdot B}$$

$$F(A, B) = A \uparrow B$$

A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

126

NOR (NON OU)

$$F(A,B) = \overline{A+B}$$

$$F(A,B) = A \downarrow B$$

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

127

Réalisation des opérateurs de base avec des NOR

$$\overline{A} = \overline{\overline{A+A}} = A \downarrow A$$

$$A+B = \overline{\overline{A+B}} = \overline{A \downarrow B} = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$$

$$A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = \overline{A} \downarrow \overline{B} = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$$

129

NAND et NOR sont des opérateurs universels

- En utilisant les NAND et les NOR on peut exprimer n'importe quelle expression (fonction) logique.
- Pour cela , Il suffit d'exprimer les opérateurs de base (NON , ET , OU) avec des NAND et des NOR.

128

Exercice

Exprimer le NON , ET , OU en utilisant des NAND ?

130

Propriétés des opérateurs **NAND** et **NOR**

$$A \uparrow 0 = 1$$

$$A \uparrow 1 = \overline{A}$$

$$A \uparrow B = B \uparrow A$$

$$(A \uparrow B) \uparrow C \neq A \uparrow (B \uparrow C)$$

$$A \downarrow 0 = \overline{A}$$

$$A \downarrow 1 = 0$$

$$A \downarrow B = B \downarrow A$$

$$(A \downarrow B) \downarrow C \neq A \downarrow (B \downarrow C)$$

131

Fin de la sixième séance