Exercice 1 Calculons les limites suites :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

   On a :

   $\lim_{x\longrightarrow 1^+}(x^2-9) = -8$ et $\lim_{x\longrightarrow 1^+}(x^2+2x-3) = 0^+$. Donc :

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3} = -\infty.$$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \sqrt{x^2+4x-9} - x$

   (a) Calculons la limite lorsque $x \longrightarrow -\infty$: En effet, lorsque $x \longrightarrow -\infty$, x est négative. Donc :

$$\sqrt{x^2+4x-9} - x = -x\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}} - x \longrightarrow +\infty.$$

   (b) Calculons la limite lorsque $x \longrightarrow +\infty$: En effet, lorsque $x \longrightarrow +\infty$, x est positive. Donc :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2+4x-9} = +\infty \text{ et } \lim_{x \longrightarrow \infty} x = +\infty.$$

   On est donc en présence d'une forme indérminée $(+\infty - \infty)$. Par conséquent, il faut d'abord lever l'indétermination avant de procéder à la recherche de la limite. Dans le cas où l'expression contient une racine carrée, souvent on multiplie et on divise par le conjugué de cette expression. En effet,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+4x-9} - x &= \frac{\left(\sqrt{x^2+4x-9}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x-9}+x\right)}{\sqrt{x^2+4x-9}+x} \\
&= \frac{4x-9}{\sqrt{x^2+4x-9}+x} \\
&= \frac{x\left(4-\dfrac{9}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{9}{x^2}}+1\right)} \\
&= \frac{4-\dfrac{9}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{9}{x^2}}+1}.
\end{aligned}$$

   D'où,

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2+4x-9} - x = 2.$$

3. $\lim_{x\longrightarrow 0} x^2\left(1+2+\dots\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\left[\frac{1}{|x|}\right]\in\mathbb{N}^*$. D'où, $1+2+\dots\left[\frac{1}{|x|}\right]$ est la somme des $n=\left[\frac{1}{|x|}\right]$ premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1. D'où,

$$1+2+\dots\left[\frac{1}{|x|}\right]=\frac{\left[\frac{1}{|x|}\right](\left[\frac{1}{|x|}\right]+1)}{2}.$$

Or, $\forall x\in\mathbb{R}^*$,

$$\begin{cases}\frac{1}{|x|}-1 & <\left[\frac{1}{|x|}\right]\leq & \frac{1}{|x|}\\ \frac{1}{|x|} & <\left[\frac{1}{|x|}\right]+1\leq & \frac{1}{|x|}+1.\end{cases}$$

D'où,

$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{|x|}\right)\left(\frac{1}{|x|}-1\right)<\frac{x^2}{2}\left(\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)\left(\left[\frac{1}{|x|}\right]+1\right)\leq\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{|x|}\right)\left(\frac{1}{|x|}+1\right).$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{1}{2}(1-|x|)<\frac{x^2}{2}\left(\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)\left(\left[\frac{1}{|x|}\right]+1\right)\leq\frac{1}{2}(1+|x|).$$

Puisque

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{2}(1-|x|)\right)=\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{2}(1+|x|)\right)=\frac{1}{2},$$

alors, d'après le théorème d'encadrement on a :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} x^2\left(1+2+\dots\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)=\frac{1}{2}.$$

Exercice 2 On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3+6x+1}{9}. \end{array}$$

Soit (u_n) la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0, \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrons qe la fonction g définie par :

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3-3x+1 \end{array}$$

est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. En effet, g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Donc, $g'(x) < 0$ si et seulement si $x \in]-1,1[$. Puisque $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset]-1,1[$, alors $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], g'(x) < 0$. On conclut donc que g est strictement décroissante sur l'intervale $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Déduisons de ce qui précède que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. En effet, la fonction g est continue et strictement monotone sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, d'où g est une bijection de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ vers $\left[g\left(\frac{1}{2}\right), g(0)\right] = \left[-\frac{3}{8}, 1\right]$. Puisque $0 \in \left[-\frac{3}{8}, 1\right]$, alors il existe un unique antécédent $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. On conclut que l'équation $g(x) = 0$ adment une solution unique dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; $g(x_0) = 0$.

2. Déduisons que x_0 est le seul point dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(x) = x$.

Un calcul direct donne : $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{9}$. Donc, $f(x) = x$ si et seulement si $g(x) = 0$. Or, la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est x_0. D'où, x_0 est l'unique point de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ vérifiant $f(x_0) = x_0$.

Montrons que $\forall x \in [0, x_0]$, on a $f(x) \geq x$. En effet,

$0 \leq x \leq x_0 \Longrightarrow g(x_0) \leq g(x) \leq g(0)$ car g est décroissante. D'où, $0 \leq 9(f(x) - x) \leq 1$. Par suite, $\forall x \in [0, x_0]\,, f(x) \geq x$.

3. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq x_0$. En effet, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{x^2+2}{3} > 0$. Donc, f est strictement croissante.

   Pour $n = 0$, on a bien $0 \leq u_0 = 0 \leq x_0$.
   Supposons que $0 \leq u_n \leq x_0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(x_0) = x_0$. Ce qui implique que $0 < \dfrac{1}{9} \leq u_{n+1} \leq x_0$. **CQFD.**

4. Étudions la monotonie de la suite (u_n). En effet, puisque $u_n \in [0, x_0]\,, \forall n \in \mathbb{N}$, alors d'après la question 2, $f(x_n) \geq u_n$ ce qui est équivalent à $u_{n+1} \geq u_n$. Par conséquent, la suite (u_n) est croissante.

   Puisque la suite (u_n) est croissante et marorée (par x_0 par exemple), alors elle est convergente vers $l \in \mathbb{R}$ tel que : $f(l) = l$. De plus, $l \in [0, x_0] \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. D'où, $l = x_0$.

Exercice 3 Soit f une fonction définie de $[0,1]$ vers $[0,1]$ continue. Montrons qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que : $f(x_0) = x_0$.

En effet, on pose la fonction :

$$\begin{array}{llll} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x. \end{array}$$

La fonction g est continue sur $[0,1]$. De plus,

$$\begin{array}{rcl} g(0) & = & f(0) - 0 \geq 0, \quad \text{car} \quad f(0) \in [0,1] \\ g(1) & = & f(1) - 1 \leq 0 \quad \text{car} \quad f(1) \in [0,1]\,. \end{array}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists x_0 \in [0,1] \quad \text{tel que} \quad g(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f(x_0) = x_0.$$

Exercice 4 Soit f la fonction défnie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x^2}$. On considère la suite récurrente (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{2}, \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrons que f est une bijection de $[0,1]$ vers $[0,1]$. En effet, la fonction f est définie et dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in]0,1]$, on a : $f'(x) = \dfrac{4x}{(2-x^2)^2} > 0$. D'où, f est strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, f est continue sur $[0,1]$. Donc, f est une bijection de $[0,1]$ vers $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$

2. Étudions la monotonie de la suite (u_n).

   Puisque la fonction qui définit la suite est croissante, il suffit de comparer u_0 et u_1 pour conclure en la monotonie de la suite. Or, $u_1 = f(u_0) = \dfrac{1}{7} < u_0 = \dfrac{1}{2}$. On conclut donc que la suite (u_n) est décroissante.

3. Vérifions si la suite (u_n) est convergente et si oui, déterminons sa limite.

   Puisque (u_n) est décroissante, alors elle sera convergente si et seulement si elle est minorée.

   Montrons par récurrence que la suite $(u_n) \subset [0,1]$. En effet,

   Pour $n = 0$, on a : $u_0 = \dfrac{1}{2} \in [0,1]$.

   Supposons que $u_n \in [0,1]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Puisque $f([0,1]) = [0,1]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$. D'où la suite (u_n) elle est minorée (par exemple par 0). (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers $l \in \mathbb{R}$ tel que : $f(l) = l$. Or, $f(l) = l \Longleftrightarrow l^3 + l^2 - 2l = 0$. D'où, $l = -2, l = 0$ ou $l = 1$. Puisque (u_n) positive et décroissante, alors $l = 0$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > f(x)$.

Montrons que $\forall x > x_0, f(x) > 0$.

On pose : $g(x) = e^{-x} f(x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{-x} \left(f'(x) - f(x)\right) > 0.$$

Donc, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'où,

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > x_0 \Longrightarrow g(x) > g(x_0) = e^{-x_0} f(x_0) = 0.$$

Par conséquent, $\forall x > x_0, g(x) = e^{-x} f(x) > 0$. Ce qui est équivalent à : $\forall x > x_0, f(x) > 0$.

Déduction. Soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$. Montrons que l'équation : $ae^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$. En effet, en s'inspirant de ce qui précède, on pose :

$$h(x) = ae^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = ae^x - 1 - x$. D'où, $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) > h(x)$. De plus, $\lim_{x \longrightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $h(x_0) = 0$.

D'après ce qui précède : $\forall x > x_0, h(x) > 0$. Alors, la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un point $x_1 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_0$ tel que $h(x_1) = 0$. Supposons sans perte de généralité que $x_1 < x_0$. Puisque h est ctrictement croissante, alors $h(x_1) = 0 < h(x_0) = 0$ ce qui est absurde. Donc, ce qu'on a supposé est faut. Par conséquent, x_0 est l'unique point de $\mathbb{R}$ tel que $ae^{x_0} = 1 + x_0 + \dfrac{x_0^2}{2}$.

Exercice 6. Soient $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et f la fonction définie par :

$$f(x) = a + \frac{x}{2(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = x - f(x)$.

1. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, si $x_0, x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1 - xx_0}{2(1+x^2)(1+x_0^2)}.$$

   D'où,

   $$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1 - x_0^2}{2(1+x_0^2)^2} \in \mathbb{R}.$$

   D'où, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1-x^2}{2(1+x^2)^2}$.

   Montrons que $f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{cases} 1 - x^2 & \leq \quad 1, \\ 2(1+x^2)^2 \geq 2. \end{cases}$$

   Alors, $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{2(1+x^2)^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

2. Montrons que la fonction φ définie par $\varphi(x) = x - f(x)$ est strictement croissante.

   La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = 1 - f'(x) > 0$ car $f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$. Donc, φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   Calculons les limites de φ en $\pm\infty$.

   Puisque $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = a$, $\lim_{x \longrightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} x = +\infty$, alors

   $$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

   La fonction φ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, φ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc, il existe un unique antécédent x_a de 0 par la fonction φ;

   $$\exists x_a! \in \mathbb{R}, \varphi(x_a) = 0 \Longleftrightarrow \exists x_a! \in \mathbb{R}/f(x_a) = x_a.$$

3. Déterminons le signe de $\varphi(a)$. En effet, par un calcul direct, on obtient

   $$\varphi(a) = a - f(a) = -\frac{a}{2(1+a^2)} < 0.$$

   Déduction. Puisque la fonction φ est bijective et strictement croissante, alors φ^{-1} existe et elle est strictement croissante aussi. D'où,

   $$\varphi(a) < 0 = \varphi(x_a) \Longrightarrow \varphi^{-1}(\varphi(a)) < \varphi^{-1}(\varphi(x_a)) \Longleftrightarrow a < x_a.$$

Exercice 7. On considère la fonction f définie comme suit :

$$\begin{array}{llll} f: & & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n + \dfrac{1}{n}$ et $y_n = n$.

Par un calcul direct et simple, on trouve que :

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2}.$$

Supposons que la fonction f est uniformément continue sur $[1, +\infty[$. Alors,

Soit $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [1, +\infty[\,, \forall y \in [1, +\infty[\,, |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_n - y_n| = \dfrac{1}{n}$. D'après la propriété d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < \delta$. D'où, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x_n - y_n| < \delta$. Ceci implique que

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon \Longleftrightarrow 2 + \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Or, si on prend $0 < \varepsilon < 2$, cette inégalité n'est pas satisfaite (contradiction avec ce qu'on a supposé). On conclut que f n'est pas uniformément continue.

Exercice 8. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels dans l'intervalle ouvert $]a, b[$.

On pose :

$$m = min(f(x_i))_{1 \leq i \leq n} \quad \text{et} \quad M = \max(f(x_i))_{1 \leq i \leq n}.$$

On a :

$$m \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq M.$$

Or, $\exists i_0, i_1 \in [|1, n|]$ tel que : $m = f(x_{i_0})$ et $M = f(x_{i_1})$. Donc, la valeur $\dfrac{f(x_1) + \ldots f(x_n)}{n}$ est comprise entre $f(x_{i_0})$ et $f(x_{i_1})$. Puisque f est continue sur l'intervale fermé d'extrémités x_{i_0} et x_{i_1}, alors par le théorème des valeurs intermédiares, il existe x_0 compris entre x_{i_0} et x_{i_1} tel que $f(x_0) = \dfrac{f(x_1) + \ldots f(x_n)}{n}$. Puisque $x_{i_0}, x_{i_1} \in]a, b[$, alors $x_0 \in]a, b[$.

Université Mohammed V.
Faculté des sciences - Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2020-2021.

Série N 3- Corrigés des exercices : 9-10-11-12-13-14
Analyse 1 - Filière SMIA.

Exercice 9.
La fonction g définie pour $x \neq 0$ par

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

admet une limite lorsque x tend vers 0. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\frac{sin(nx)}{x} = n\frac{sin(nx)}{nx}$ tend vers n lorsque x tend vers 0.
On a donc

$$lim_{x \to 0} g(x) = a_1 + 2a_2 + ... + na_n.$$

D'autre part, puisque $|f(x)| \leq |sin(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|g(x)| \leq |\frac{sin(x)}{x}|$$

pour tout réel $x \neq 0$. Comme conséquence, on a $lim_{x\to 0}|g(x)| = |a_1 + 2a_2 + ... + na_n| \leq lim_{x\to 0}|\frac{sin(x)}{x}| = 1.$

Remarque. Une autre méthode consiste à remarquer que la fonction f est dérivable avec $f'(0) = a_1 + 2a_2 + ... + na_n$. Or, $f'(0)$ est la limite du rapport

$$\frac{f(x)}{x}, \text{ lorsque } x \text{ trend vers } 0.$$

D'après les hypothèses, on a la majoration suivante :

$$|\frac{f(x)}{x}| \leq |\frac{sin(x)}{x}|.$$

Par passage à la limite, on obtient : $|a_1 + 2a_2 + ... + na_n| \leq 1$.

Exercice 10.
Tout d'abord, f admet un point fixe car si on considère la fonction g définie, pour tout $x \in [a, b]$, par $g(x) = f(x) - x$, alors la fonction g est continue sur $[a, b]$. De plus, elle vérifie $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. Par application du théorème de la valeur intermédiaire, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$. L'élément x_0 vérifie $f(x_0) = x_0$.
Il reste à montrer l'unicité de x_0. Supposons qu'il existe un autre élément x_1 de $[a, b]$ tel que $f(x_1) = x_1$ et supposons par exemple qu'on ait : $x_0 < x_1$. L'application f étant dérivable sur $[a, b]$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[x_0, x_1]$. Il existe alors $c \in]x_0, x_1[$ tel que

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c).$$

Cela implique $f'(c) = 1$ ce qui contredit l'hypothèse $f'(x) \neq 1$, pour tout $x \in]a, b[$. Il existe donc un seul élément $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 11.
Si on considère la fonction h donnée, elle vérifie $f(a) = f(b) = 0$. Puisque'elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, on peut appliquer le théorème de Rolle. Il existe donc $x_0 \in]a, b[$ tel que $h'(x_0) = 0$.
Si on calcule la dérivée de h, on obtient :

$$h'(x) = [f'(x) + f(x)g'(x)]e^{g(x)}.$$

Par suite, l'égalité $h'(x_0) = 0$ équivaut à $f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = 0$.

Exercice 12.
On considère la fonction g définie pour tout $x \in [0, 2]$ par

$$g(x) = f(x) - x.$$

Cette fonction est aussi deux fois dérivable sur $[0, 2]$ et elle vérifie

$$g(0) = g(1) = g(2) = 0.$$

On peut appliquer le théorème de Rolle à g sur l'intervalle $[0, 1]$. Il existe $x_1 \in]0, 1[$ tel que $g'(x_1) = 0$.
On applique aussi le théorème de Rolle à g sur $[1, 2]$. Il existe donc $x_2 \in]1, 2[$ tel que $g'(x_2) = 0$.

La fonction g' est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$. Elle vérifie $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$, on peut lui appliquer le théorème de Rolle. Il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $(g')'(x_0) = g"(x_0) = 0$.
D'autre part, on a :

$$g"(x) = f"(x), \text{ pour tout } x \in]0, 2[.$$

Par conséquent, x_0 vérifie aussi $f"(x_0) = 0$.

Exercice 13.
Pour montrer que f est uniformément continue, on va montrer que f est lipschitzienne, c'est à dire

$$\text{Il existe une constante réelle } K > 0, \text{ telle que } \forall (x, y) \in]a, b[, \text{ on a } |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Pour cela, il suffit de montrer que la dérivée est majorée par une constante $K > 0$. En effet, si on applique le théorème des accroissements finis à f sur $[x, y]$, pour tout $a < x < y < b$, on aura

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq K.$$

On choisit un élément fixé $\alpha \in]a, b[$, alors pour tout $x \in]a, b[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f' sur $[\alpha, x]$ ou $[x, \alpha]$ selon le cas.

Supposons, par exemple, $\alpha < x$, alors il existe $c \in]\alpha, x[$ tel que

$$\frac{f'(x) - f'(\alpha)}{x - \alpha} = f"(c).$$

On déduit donc $|\frac{f'(x)-f'(\alpha)}{x-\alpha}| \leq M$, où M est la constante qui vérifie $|f"(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$.
On a donc la majoration $|f'(x)| \leq M(b - a) + |f'(\alpha)|$. La constante K cherchée peut être choisi en posant $K = M(b - a) + |f'(\alpha)|$.

Exercice 14.
1. Puisque g est dérivable sur $[c, d]$ (donc continue sur $[c, d]$) et vérifie $g(c) = g(d) = 0$, on peut lui appliquer le théorème de Rolle. Il existe donc $x_0 \in]c, d[\subset [c, d]$ tel que $g'(x_0) = 0$.

2. La fonction g est deux fois dérivable et vérifie $g"(x) \leq 0$ pour tout $x \in]c, d[$. On déduit que la fonction g' est décroissante sur $[c, d]$.

Si on décompose $[c, d] = [c, x_0] \cup [x_0, d]$. Alors, puisque $g'(x_0) = 0$, on a $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [c, x_0]$ et donc g est croissante sur $[c, x_0]$. On a donc

$$g(x) \geq g(c) = 0, \text{ pour tout } x \in [c, x_0].$$

De même, sur l'intervalle $[x_0, d]$, g' est décroissante et donc on a

$$g'(x) \leq g'(x_0) = 0, \text{ pour tout } x \in [x_0, d].$$

Ainsi, la fonction g est décroissante sur $[x_0, d]$ et on a

$$g(x) \geq g(d) = 0, \text{ pour tout } x \in [x_0, d].$$

On a donc obtenu le résultat souhaité.