Université Mohammed V.
Faculté des sciences - Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2020-2021.

Série N 2 - Corrigé
Analyse 1 - Filière SMIA.

Exercice 1. *Pour tout* $k \in \{1, \cdots, n\}$*, on a :*

$$1 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n},$$

alors

$$n+1 \quad \leq \quad n+\sqrt{k} \quad \leq \quad n+\sqrt{n},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \quad \leq \quad \frac{1}{n+\sqrt{k}} \quad \leq \quad \frac{1}{n+1},$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{n}} \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1},$$

ceci implique

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \quad \leq \quad \frac{n}{n+1}.$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Alors $(u_n)_n$ *est convergente et sa limite égale à 1.*

Exercixe 2 (calcul approché de $\sqrt{a}$, où $a \in \mathbb{R}^{*+}$).

On considère la suite

$$u_0 \in \mathbb{R}^{*+}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}).$$

Soit (v_n) la suite réelle de terme général $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n^2$. En effet,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}}.$$

   Un calcul direct conduit à :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} \\ u_{n+1} + \sqrt{a} &= \frac{(u_n + \sqrt{a})^2}{2u_n}. \end{aligned}$$

   D'où,

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}}{\dfrac{(u_n + \sqrt{a})^2}{2u_n}} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = v_n^2.$$

2. Puisque $u_n - \sqrt{a} < u_n + \sqrt{a}$, alors $v_n < 1$. D'où, $v_{n+1} = v_n^2 \Longrightarrow v_{n+1} < v_n$. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq 0$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq min(v_0, 0)$. Par conséquent, (v_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.

   Or, $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n^2$, d'où $l = l^2 \Longleftrightarrow l = 0$ ou bien $l = 1$.

   Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 1$ et (v_n) est strictement décroissante, alors $l = 0$.

3. On sait que

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \Longleftrightarrow u_n = \frac{\sqrt{a}(1 + v_n)}{1 - v_n}.$$

   Puisque v_n converge vers 0, alors u_n converge vers $\sqrt{a}$.

4. Pour $u_0 = 1$ et $a = 2$, on trouve :

$$u_1 = \frac{3}{2}, u_2 = \frac{17}{12}, u_3 = \frac{577}{408} = 1.4142\cdots \approx \sqrt{2}.$$

Université Mohammed V.
Faculté des sciences - Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2020-2021.

Série N 2 - Corrigé
Analyse 1 - Filière SMIA.

Exercice 3

1. Montrons que $(u_n)_n$ est une suite croissante. Puisque la suite est à termes positifs, afin de comparer u_n et u_{n+1}, on va comparer leur carré. On a : $u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n}$, pour tout entier $n \geq 0$. Par suite, on a $u_{n+1}^2 \geq u_n^2$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante.

2. Remarquons d'abord que, puisque la suite est croissante, on a : $u_n \geq 1 = u_0$, pour tout $n \geq 0$. Pour établir l'inégalité demandée, on élève au carré.

$u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n}$, et on doit donc justifier que $u_n^2 + \frac{1}{2^n} \leq (u_n + \frac{1}{2^n})^2$.

Après simplification, il reste :$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \leq u_n$, ce qui est réalisé, compte tenu de la remarque précédente et du fait qu'on a : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \leq 1$, pour tout entier n.

3. Pour montrer que la suite est convergente, il suffit de montrer qu'elle est majorée.

On somme les inégalités : $u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{2^n}$ à partir de $n = 0$. Il reste alors : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2^0} + ... + \frac{1}{2^n}$, et on a donc $u_{n+1} \leq \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} \leq 2$.

Par conséquent, la suite est convergente. Il reste à calculer sa limite. Il est plus facile de chercher la limite de la suite $(u_n^2)_n$.

On a $u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n}$ à partir de $n = 0$. On somme toutes ces égalités et on obtient : $u_{n+1}^2 = u_0^2 + \frac{1}{2^0} + ... + \frac{1}{2^n}$.

En remplaçant u_0 par sa valeur et par passage à la limite, on obtient : $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = 1 + 2 = 3$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Exercice 4

1. Pour $n \geq 2$, on a $\mid u_{n+1} - u_n \mid = \mid \frac{u_{n-1}-u_n}{(1+u_n)(1+u_{n-1})} \mid$.

Nous devons donc majorer $\mid \frac{1}{(1+u_n)(1+u_{n-1})} \mid$ et pour cela, il faudra minorer u_n.

On a $u_{n+1} = \frac{2+u_n}{1+u_n} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \geq 1$. Ainsi, on a $1 + u_n \geq 2$ pour tout $n \geq 1$.

On déduit donc : $\mid u_{n+1} - u_n \mid \leq \frac{1}{4} \mid u_{n-1} - u_n \mid$ pour tout $n \geq 2$.

2. Nous allons déduire du résultat précédent que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy.

On doit majorer le terme $\mid u_n - u_m \mid$ et on suppose par exemple qu'on a $n > m$. On peut décomposer :

$u_n - u_m = u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + ... + u_{m+1} - u_m$ puis on passe aux valeurs absolues :

$\mid u_n - u_m \mid \leq \mid u_n - u_{n-1} \mid + \mid u_{n-1} - u_{n-2} \mid + ... + \mid u_{m+1} - u_m \mid$.

D'autre part, puisque $\mid u_{n+1} - u_n \mid \leq \frac{1}{4} \mid u_{n-1} - u_n \mid$ pour tout $n \geq 2$, on peut établir (par exemple par récurrence) qu'on a :

$$\mid u_{n+1} - u_n \mid \leq \frac{1}{4^{n-1}} \mid u_2 - u_1 \mid, \text{ pour tout } n \geq 2.$$

On déduit que si $n > m \geq 2$, on a :

$$\mid u_n - u_m \mid \leq \frac{1}{4^{n-2}} \mid u_2 - u_1 \mid + \frac{1}{4^{n-3}} \mid u_2 - u_1 \mid + ... + \frac{1}{4^{m-1}} \mid u_2 - u_1 \mid, \text{ d'où}$$

$$\mid u_n - u_m \mid \leq \mid u_2 - u_1 \mid [\frac{1}{4^{m-1}} + ... + \frac{1}{4^{n-2}}] \leq \frac{1}{4^{m-1}} \frac{1}{1-1/4} \mid u_2 - u_1 \mid = \frac{1}{4^{m-1}} \frac{4}{3} \mid u_2 - u_1 \mid.$$

Puisque le terme $\frac{1}{4^{m-1}} \frac{4}{3} \mid u_2 - u_1 \mid$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que si $m \geq N_\varepsilon$, on a : $\frac{1}{4^{m-1}} \frac{4}{3} \mid u_2 - u_1 \mid \leq \varepsilon$.

Nous avons donc bien établi que si $n > m \geq N_\varepsilon$, on a $\mid u_n - u_m \mid < \varepsilon$ et la suite est donc bien de Cauchy.

La suite est donc convergente et sa limite l vérifie : $l = \frac{l+2}{l+1}$, ce qui donne $l = \sqrt{2}$.

Remarque $(u_n)_n$ est une suite à termes positifs. De plus, c'est une suite récurrente où la fonction associée est $f : x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$. On peut établir sans trop de difficultés que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $f([0,+\infty[) \subset]1,2]$. Il est possible de montrer la convergence de la suite en considérant les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$. Cette méthode sera utilisée dans l'exercice suivant.

Exercice 5

Dans cet exercice, on a une suite récurrente de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$ avec, cette fois-ci, une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Il est clair que le suite est à termes positifs. La méthode de résolution consiste à considérer les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ ainsi que la fonction $f \circ f$ qui est croissante.
En procédant comme pour le cas où on avait une fonction croissante, puisque $u_0 = 0 < u_2$, la suite $(u_{2n})_n$ est croissante (récurrence facile) et puisque $u_1 > u_3$, la suite $(u_{2n+1})_n$ est décroissante. Cette dernière sera convergente car elle est minorée par 0. Pour l'autre sous suite, on peut remarquer qu'elle est majorée par n'importe quel terme u_{2p+1} d'indice impair. On peut aussi anticiper et résoudre l'équation $f(x) = x$, ce qui donne $x = -1 + \sqrt{a+1}$ (on oublie la solution négative), puis on démontre par récurrence que $u_{2n} \leq -1 + \sqrt{1+a}$ pour tout $n \geq 0$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $u_{2n} \leq -1 + \sqrt{1+a}$.
C'est vrai pour $n = 0$.
On suppose $u_{2n} \leq -1 + \sqrt{1+a}$, puisque $f \circ f$ est croissante, on obtient : $f \circ f(u_{2n}) \leq f(-1 + \sqrt{1+a})$, c'est à dire $u_{2n+2} \leq -1 + \sqrt{1+a}$.
La suite extraite $(u_{2n})_n$ est croissante et majorée, elle est doncconvergente vers une limite l_1 qui doit vérifier $f \circ f(l_1) = l_1$. On a $f \circ f(x) = \frac{a(2+x)}{4+a+2x}$ et la seule solution positive de l'équation considérée est $-1 + \sqrt{1+a}$.
En faisant de même avec la suite extraite $(u_{2n+1})_n$, on trouve une limite l_2 qui est aussi égale à $-1 + \sqrt{1+a}$.
Par cons.'equent, la suite proposée est convergente vers $-1 + \sqrt{1+a}$.

Exercice 6

Cet exercice ne présente aucune difficulté.
La suite est bien géométrique puique $u_{n+1} = (e/4)u_n$ pour tout $n \geq 0$. La raison est donc $q = e/4$.
Puisque le premier terme est positif ($u_0 = 1/2$) et que la raison q vérifie $0 < q < 1$, elle est décroissante et convergente vers 0.

Exercice 9

1. Nous avons une suite à termes positifs, récurrente où la fonction associée est $f : x \mapsto \frac{4x+2}{x+3}$. Cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Montrons que la suite est croissante, c'est à dire qu'on a $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier n.
C'est vrai pour $n = 0$. On suppose qu'on a : $u_n \leq u_{n+1}$, on applique f qui est croissante et on obtient $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est à dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
On cherche un majorant pour la suite. Il y a une méthode qui consiste à anticiper pour trouver un candidat. On résout l'équation $f(x) = x$ et on garde la solution positive, c'est à dire $l = 2$. Nous avons une suite qui est croissante, on souhaite montrer qu'elle est majorée auquel cas elle sera convergente nécessairement vers $l = 2$, en particulier, 2 doit être un majorant. Montrons à présent que 2 est bien un majorant, c'est à dire que : Pour tout entier n, on a $u_n \leq 2$.
Par récurrence, c'est vrai pour $u_0 \in]1,2]$. On suppose que $u_n \leq 2$, on applique f qui est croissante et on obtient $f(u_n) \leq f(2)$, c'est à dire $u_{n+1} \leq 2$
2. La suite donnée est croissante et majorée, elle converge vers une limite l positive qui vérifie $f(l) = l$, et donc $l = 2$.

Exercice 10

On remarque que la suite donnée est une suite à termes strictement positifs, la suite est décroissante (strictement) car ; $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n u_{n-1}} < 1$. D'autre part, elle est minorée par 0 donc elle converge vers une limite qui vérifie $l = \frac{l}{1+l^2}$.
Après résolution, on trouve $l = 0$.

Exercixe 7 $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$ et $(v_n)_n$ la suite définie par :

$$v_0 = 0, \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{n}^{k=1} u_k, \quad \forall n \geq 1.$$

1. Montrons que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.

   En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Or,

$$v_n - l = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}(u_k - l) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=N_\varepsilon-1}(u_k - l) + \frac{1}{n}\sum_{k=N_\varepsilon}^{k=n}(u_k - l),$$

   d'où,

$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=N_\varepsilon-1}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_\varepsilon}^{k=n}|u_k - l|.$$

   On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=N_\varepsilon-1}|u_k - l| = 0.$$

   Donc,

$$\exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N'_\varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=N_\varepsilon-1}|u_k - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=N_\varepsilon}^{k=n}|u_k - l| &< \frac{1}{n}\sum_{k=N_\varepsilon}^{k=n}\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{1}{n}\frac{\varepsilon}{2}(n - N_\varepsilon + 1) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(1 - N_\varepsilon)}{2n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

   Soit $N''_\varepsilon = \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N''_\varepsilon \Longrightarrow |v_n - l| < \varepsilon.$$

   On conclut que

$$\lim_{n\to+\infty}|v_n - l| = 0.$$

   Par suite

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l.$$

2. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=l \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=l$$

D'après la première question

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=l \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)=l.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_{k+1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k \\
&= \frac{1}{n}[\sum_{k=2}^{n+1}u_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}u_k] \\
&= \frac{1}{n}[u_{n+1}-u_1].
\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}[u_{n+1}-u_1]=l.$$

Puisque

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_1}{n}=0,$$

alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{n}=l.$$

Ce qui est équivalent à

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_n}{n}=l,$$

car

$$\frac{u_{n+1}}{n}=\frac{n+1}{n}\frac{u_{n+1}}{n+1}$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

3. On suppose que $u_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$. Montrons que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{u_n}=l.$$

En effet, si

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$$

alors,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n))=\ln(l).$$

D'après la deuxième question

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\ln(u_n)=\ln(l).$$

Ce qui est équivalent à

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \ln(\sqrt[n]{u_n}) = \ln(l).$$

On conclut que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Exercixe 8 Etudions la monotonie et la convergence des suites suivantes :

1. $u_0 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

   Il est facile de montrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement positive. On a : $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est définie par :

   $$\begin{array}{llll} f : x \in \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

   La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$. D'où, il suffit de comparer u_0 et u_1. En effet,

   $$u_1 - u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0.$$

   Puisque $u_0 < u_1$ et que f est strictement croissante, alors la suite (u_n) est strictement croissante. De plus, il est facile de montrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 1. On conclut donc que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = \sqrt{l}$. D'où, $l = 0$ ou bien $l = 1$. Puisque la suite (u_n) est strictement positive et strictement croissante, alors $l = 1$.

2. $v_0 = 2, v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.

   Il est facile de montrer par récurrence que la suite (v_n) est strictement positive. De même on a : $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est la fonction racine carrée.

   La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$. D'où, il suffit de comparer v_0 et v_1. En effet, Puisque $v_1 = \sqrt{2} < v_0 = 2$ et que f est strictement croissante, alors la suite (v_n) est strictement décroissante. De plus, (v_n) est minorée (par 0 par exemple). On conclut donc que (v_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = \sqrt{l}$. D'où, $l = 0$ ou bien $l = 1$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 1$ (on peut le montrer par récurrence), alors $l = 1$.

3. $w_0 = 1, w_{n+1} = \frac{w_n}{w_n^2 + 1}$.

   On a : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n > 0$. De plus,

   $$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{w_n^2 + 1} < 1,$$

   d'où, $w_{n+1} < w_n$.

   Par conséquent, (w_n) est décroissante et minorée. On conclut que (w_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ tel que

   $$l = \frac{l}{l^2 + 1} \Longleftrightarrow l = 0.$$

<u>Solution de l'exercice 12 Série 2 :</u>

On considère la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2}$$

avec : $u_0 = 0$

1. <u>Calculons u_n et donnons sa limite</u> :

   Puisque la somme des premiers termes, d'une suite arithmétique de raison 1, est donnée par la formule suivante :
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$
   alors :
   $$u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{1}{n^2} \frac{2n(2n+1)}{2} = \frac{2n+1}{n}$$

   la limite de u_n est alors :

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$$

2. <u>Montrons que la suite w_n est convergente</u> :

   On pose :

   $$w_n = u_n - v_n$$

   avec :

   $$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k+n^2}$$

   donc :
   $$w_n = \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k}{k+n^2}\right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{n^2(k+n^2)} == \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{k+n^2}$$

   Pour encadrer $\frac{k^2}{k+n^2}$ indépendamment de k, On utilise le fait que $1 \leq k \leq 2n$:

   $$1 \leq k \leq 2n \Rightarrow 1 + n^2 \leq k + n^2 \leq 2n + n^2 \Rightarrow \frac{1}{2n+n^2} \leq \frac{1}{k+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$$

par suite :

$$\frac{1}{2n+n^2} \leq \frac{k^2}{k+n^2} \leq \frac{4n^2}{1+n^2}$$

En sommant les termes de $k = 1$ à $k = 2n$, on obtient :

$$\frac{2n}{n^2(2n+n^2)} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{k+n^2} \leq \frac{8n^3}{n^2(1+n^2)}$$

Puisque :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2(2n+n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3}{n^2(1+n^2)} = 0$$

D'après le théorème de gendarmes, la suite w_n est convergente vers la même limite :

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0.$$

3. <u>La convergence de la suite v_n</u> :

   Puisque :

$$v_n = u_n - w_n,$$

   En utilisant les propriétés des opérations sur les limites, on en déduit que la suite v_n est convergente et sa limte est donnée par :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 2.$$

<u>Solution de l'exercice 13 Série 2 :</u>

On considère les suites réelles à termes positifs u_n et v_n définies par :

$$u_0 = a > 0,\ v_0 = b > 0\ et\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}\ avec\ a < b$$

1. <u>Montrons que $\forall n \geq 1,\ u_n \leq v_n$</u> :

   En utilisant l'identité remarquable $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0,\ \forall x \geq 0\ et\ \forall y \geq 0$ on obtient :

   $$\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}$$

   c.à.d :

   $$u_{n+1} \leq v_{n+1},\ \forall n \in \mathbf{N}$$

   ou encore :

   $$\boxed{u_n \leq v_n,\ \forall n \geq 1}$$

   Montrons que $u_n \leq u_{n+1},\ \forall n \geq 1$:

   Puisque tous les termes sont positifs :

   $$u_n \leq v_n \Rightarrow u_n^2 \leq u_n v_n \Rightarrow u_n \leq \sqrt{u_n v_n} \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}\ c.q.f.d$$

   Montrons que $v_{n+1} \leq v_n,\ \forall n \geq 1$:

   $$u_n \leq v_n \Rightarrow u_n + v_n \leq 2v_n \Rightarrow v_{n+1} \leq v_n\ c.q.f.d$$

2. <u>Montrons que u_n et v_n convergent vers la même limite</u> :

   Puisque :

   $$a = u_0 \leq u_n \leq u_{n+} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0 = b$$

   alors :
   la suite u_n est croissante majorée et la suite v_n est décroissante minorée, donc elles convergent.

Supposons que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l_1 \ et \ \lim_{n\to\infty} v_n = l_2$$

En utilisant les opérations sur les limites des suites, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} u_n \lim_{n\to+\infty} v_n} \ et \ \lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \frac{\lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n}{2}$$

par suite :

$$l_1 = \sqrt{l_1 l_2} \ et \ l_2 = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

On peut conclure alors que :

$$l_1 = l_2$$

c.à.d les deux suites convergent vers la même limite.