Université Mohammed V de Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

SMIA-S1
Analyse1
Le 16 Jan. 2019

Automne 2018
Rattrapage
Durée :**1H30**

Les exercices sont indépendants. Justifiez toutes vos réponses. La qualité de présentation et de rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. On considère l'ensemble $A = \left\{ x = \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}), n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

a- Montrer que A admet une borne supérieur ($\sup A$) et une borne inférieure ($\inf A$).

b- Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

Exercice 2. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

1- Montrer que la fonction composée $g = f \circ f$ est croissante.

Soit la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \quad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$

2- Calculer u_3 et donner sa valeur **décimale approchée** à 10^{-3} près par excès.

3- Montrer que, $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_n \leq 1$.

Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$.

4- Établir, pour tout $n \geq 1$, la relation entre a_n, a_{n+1} et g.

5- En déduire que la suite $(a_n)_n$ est croissante.

6- Montrer que $(a_n)_n$ converge et trouver sa limite.

7- Étudier la monotonie de la suite $(b_n)_n$.

8- Montrer que $(b_n)_n$ converge et trouver sa limite.

9- Montrer que les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que

$$\exists a > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) > a.$$

1- Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) > f(0) + a\,x$.

2- En déduire $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

3- Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

4- Déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

g(x) = y

Bonne Chance