Université Mohammed V **Année universitaire 2020/21**

Faculté des Sciences **Filière SMIA**

Rabat

<u>Série n°2 de Mécanique</u>

<u>Exercice 1 :</u>

Dans un repère orthonormé R(O,xy) de base $(\vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées cartésiennes d'un mobile M sont telles que : $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = -t^2 + 1 \end{cases}$; t est le temps.

1) Trouvez l'équation cartésienne de la trajectoire et donner graphiquement sont allure.
2) Déterminer les composantes cartésiennes et le module du :

   a) vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$.

   b) vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$.

3) Quelles sont les composantes tangentielle γ_t et normale γ_n de $\vec{\gamma}(M/R)$?
4) Déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire de M en fonction du temps.
5) Donner les coordonnées polaires ρ et φ du mobile en fonction du temps t.

<u>Exercice 2:</u>

On considère un point *M* en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque instant: $\rho(t) = a_0 t^2 + \rho_0$, $\varphi(t) = \omega t - \varphi_0$ et $z(t)=-vt$, avec $\rho_0=1m$, $a_0=1m.s^{-2}$, $\omega=3rad.s^{-1}$, $\varphi_0=2rad$ et $v=2m.s^{-1}$.

1. Exprimer dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$, les vecteurs vitesse et accélération de *M*.

2. Calculer la norme du vecteur vitesse de *M* à l'instant $t = 1$ s.

3. Calculer la norme du vecteur accélération de *M* à l'instant initial ($t = 0$ s).

<u>Exercice 3:</u>

On considère un point *M* en mouvement dans le plan *(xOy)*. *M* est repéré par ses coordonnées polaires suivantes : $\rho = \frac{\rho_0}{2}(1+\cos\varphi)$; $\varphi = \omega t$ où ρ_0 et ω sont des constantes positives.

1. Quelle est l'allure de la trajectoire de *M*.

2. Exprimer, en fonction de l'angle φ, l'abscisse curviligne s de *M*, comptée à partir du point *A* qui correspond à $\varphi = 0$. Pour quel angle polaire a-t-on $s = \rho_0$? On désignera par *B* la position correspondante de *M*.

3. En déduire le périmètre de la trajectoire.

4. Exprimer dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$, les vecteurs vitesse et accélération de *M*.

5. En déduire, les modules de la vitesse et de l'accélération de *M* en fonction de ρ.

6. Déterminer le rayon de courbure *Rc* de la trajectoire.

7. Déterminer les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{n}, \vec{b})$*)*.

8. Calculer les accélérations tangentielle et normale de *M*.

9. Application numérique : ρ_0 = 50cm, ω = 3.2rad/s. Calculer la vitesse, l'accélération et le rayon de courbure en *A* et *B*.

Exercice 4 :

L'abscisse curviligne d'un point matériel *M* décrivant un cercle de rayon *R* est $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt$, *a* et *b* étant des constantes.

1. Exprimer, dans la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$, les accélérations tangentielle et normale de *M*.

2. Déduire le module de l'accélération de *M*.

Corrigé de la série 2

Corrigé de l'exercice 1 :

1. $x(t)+1=t \quad \Rightarrow \quad y=-x^2-2x$ (équation de la trajectoire), la trajectoire est une parabole

2. $\vec{V}(M/\Re)=\left.\dfrac{d\,\vec{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i}+\dfrac{dy}{dt}\vec{j}+\dfrac{dz}{dt}\vec{k} = \vec{i}-2t\,\vec{j}$.

$$\vec{\gamma}(M/R)=\left.\frac{d\,\vec{V}(M/\Re)}{dt}\right|_{\Re} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = -2\,\vec{j}$$

3. Accélération tengentielle : $\vec{\gamma}_t = \dfrac{d\left|\vec{V}(M/\Re)\right|}{dt}\vec{\tau}$

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{V}(M/\Re)}{\left|\vec{V}(M/\Re)\right|}=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{i}-\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{j}\ ;\quad \frac{d\left|\vec{V}(M/\Re)\right|}{dt}=\frac{d(\sqrt{1+4t^2})}{dt}=\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\gamma}_t=\frac{4t}{1+4t^2}\vec{i}-\frac{8t^2}{1+4t^2}\vec{j}\ .$$

Accélération normale : $\vec{\gamma}_n=\vec{\gamma}(M/\Re)-\vec{\gamma}_t\ ; \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}_n=-\dfrac{4t}{1+4t^2}\vec{i}-\dfrac{2}{1+4t^2}\vec{j}$

4. Rayon de courbure : $R_c=\dfrac{\left|\vec{V}(M/\Re)\right|^3}{\left|\vec{V}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)\right|}=\dfrac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}$

Ou bien : $R_c=\dfrac{\left|\vec{V}(M/\Re)\right|^2}{\left|\vec{\gamma}_n\right|}=\dfrac{1+4t^2}{\sqrt{\left(\dfrac{4t}{1+4t^2}\right)^2+\left(\dfrac{2}{1+4t^2}\right)^2}}=\dfrac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}$

5. Coordonnées polaires : $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1+t)^2+(-t^2+1)^2}$

$$\varphi = \mathrm{arctg}(y/x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{-t^2+1}{-1+t}\right) = -\mathrm{arctg}(1+t)$$

Corrigé de l'exercice 2 :

1. $$\vec{V}(M/\Re) = \left.\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d(\rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k})}{dt}\right|_{\Re} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\left.\frac{d\,\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\Re} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}(M/\Re) = 2a_0 t\,\vec{e}_\rho + (a_0 t^2 + \rho_0)\omega\,\vec{e}_\varphi - v\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{V}(M/\Re)\right\| = \sqrt{(2a_0 t)^2 + \left((a_0 t^2 + \rho_0)\omega\right)^2 + v^2}$$

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \left.\frac{d\,\vec{V}(M/\Re)}{dt}\right|_{\Re} = 2a_0\,\vec{e}_\rho + 2a_0\omega t\,\vec{e}_\varphi + 2a_0\omega t\,\vec{e}_\varphi - (a_0 t^2 + \rho_0)\omega^2\,\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\gamma}(M/\Re) = (2a_0 - (a_0 t^2 + \rho_0)\omega^2)\,\vec{e}_\rho + 4a_0\omega t\,\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \sqrt{\left(2a_0 - (a_0 t^2 + \rho_0)\omega^2\right)^2 + (4a_0\omega t)^2}$$

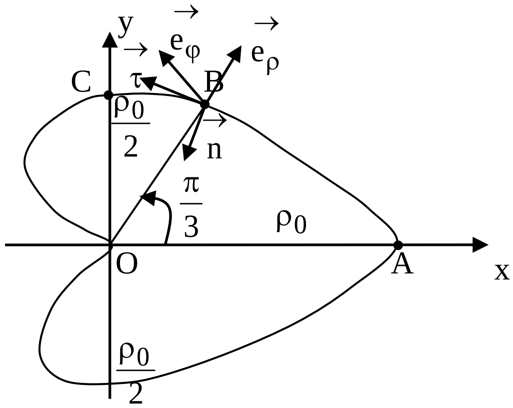
2. Norme du vecteur vitesse de M à l'instant t=1s.

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{V}(M/\Re)\right\| = \sqrt{(2a_0)^2 + ((a_0 + \rho_0)\omega)^2 + v^2} = 6.63\,m/s$$

3. Norme du vecteur accélération de M à l'instant initial (t=0s)

$$\left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \sqrt{\left(2a_0 - \rho_0\omega^2\right)^2} = 7\,m/s^2$$

Corrigé de l'exercice 3



La trajectoire de *M* est une cardioïde. Elle admet l'axe (*Ox*) comme un axe de symétrie.

Elle coupe cet axe en *O*($\rho = 0, \varphi = \pi$) et en A($\rho=\rho_0$, $\varphi=0$). Elle rencontre l'axe (*Oy*) en $C(\rho = \frac{\rho_0}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2})$ et $C'(\rho = \frac{\rho_0}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$.

2. En coordonnées polaires : $d\vec{OM} = d\rho\,\vec{e_\rho} + \rho d\varphi\,\vec{e_\varphi}$.

En coordonnées curvilignes : $d\vec{OM} = ds\,\vec{\tau} \quad \Rightarrow \quad (ds)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 \Rightarrow ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2}$.

$$\rho = \frac{\rho_0}{2}(1+\cos(\varphi)) \Rightarrow d\rho = -\frac{\rho_0}{2}\sin(\varphi)\,d\varphi \Rightarrow ds = \sqrt{\left(-\frac{\rho_0}{2}\sin(\varphi)d\varphi\right)^2 + \left(\frac{\rho_0}{2}(1+\cos(\varphi))d\varphi\right)^2}$$

$$\Rightarrow ds = \frac{\rho_0}{2}d\varphi\sqrt{2(1+\cos(\varphi))} \quad \Rightarrow ds = \rho_0\cos(\frac{\varphi}{2})d\varphi \quad \Rightarrow s = \int \rho_0\cos(\frac{\varphi}{2})d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad s = 2\rho_0\sin(\frac{\varphi}{2}) + s_0$$

L'abscisse curviligne s de M est complétée à partir du point A, c-à-d s=0 en A. Donc s=0 si $\varphi=0=2\rho_0\sin(0)+s_0=0$, d'où $s_0=0$.

$$\Rightarrow \quad s = 2\rho_0\sin(\frac{\varphi}{2})$$

Si $\quad s = \rho_0 \Rightarrow \quad \rho_0 = 2\rho_0\sin(\frac{\varphi}{2}) \quad \Rightarrow \quad \sin(\frac{\varphi}{2}) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$.

Donc : $\quad \rho(\frac{\pi}{3}) = \frac{\rho_0}{2}\left(1+\cos(\frac{\pi}{2})\right) = \frac{3}{4}\rho_0 \quad \Rightarrow \quad B(\frac{3}{4}\rho_0, \frac{\pi}{3})$.

3.

Le demi-périmètre correspond à la longueur de l'arc AO.

$$\frac{1}{2}P = \int_A^O ds = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \rho_0\cos(\frac{\varphi}{2})d\varphi = 2\rho_0\left[\sin(\frac{\varphi}{2})\right]_0^\pi = 2\rho_0$$, Le périmètre de la trajectoire est $P=4\rho_0$

4.

$$\vec{V}(M/\Re) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_\Re = \left.\frac{d(\rho\,\vec{e_\rho})}{dt}\right|_\Re = \left.\frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d(\vec{e_\rho})}{dt}\right|_\Re = -\frac{\rho_0}{2}\omega\sin(\varphi)\,\vec{e_\rho} + \frac{\rho_0}{2}\omega(1+\cos(\varphi))\,\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \left.\frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt}\right|_\Re = -\frac{\rho_0}{2}\omega^2\cos(\varphi)\vec{e_\rho} - \frac{\rho_0}{2}\omega^2\sin(\varphi)\vec{e_\varphi} - \frac{\rho_0}{2}\omega^2\sin(\varphi)\vec{e_\varphi} - \frac{\rho_0}{2}\omega^2(1+\cos(\varphi)\vec{e_\rho}$$

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = -(\rho_0\cos(\varphi) + \frac{\rho_0}{2})\omega^2\,\vec{e_\rho} - \rho_0\omega^2\sin(\varphi)\vec{e_\varphi}$$

5.

$$\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\rho_0}{2}\omega\sin(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{\rho_0}{2}\omega(1+\cos(\varphi))\right)^2} = \rho_0\omega\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \sqrt{\left((\rho_0\cos(\varphi)+\frac{\rho_0}{2})\omega^2\right)^2 + \left(\rho_0\omega^2\sin(\varphi)\right)^2} = \frac{\rho_0}{2}\omega^2\sqrt{1+8\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

On exprime $\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|$ et $\left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\|$ en fonction de ρ :

$$\rho = \frac{\rho_0}{2}(1+\cos(\varphi)) \Rightarrow \rho = \rho_0\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{V}(M/\Re)\right\| = \omega\sqrt{\rho\rho_0}\ , \quad \left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \frac{\omega^2}{2}\sqrt{\rho_0^2+8\rho_0\rho}\ .$$

6. Rayon de courbure R_c de la trajectoire : $R_c = \dfrac{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|^3}{\left\|\vec{V}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)\right\|}$

$$\vec{V}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{\rho_0^2\omega^2}{2}\sin^2(\varphi)\,\vec{k} + \frac{\rho_0\omega}{2}(1+\cos(\varphi)(\rho_0\omega^2\cos(\varphi)+\frac{\rho_0\omega^2}{2})\,\vec{k}$$
$$= \frac{3}{2}\rho_0^2\omega^2 co^2(\frac{\varphi}{2})\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{V}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \frac{3}{2}\rho_0^2\omega^2 co^2(\frac{\varphi}{2})$$

$$\Rightarrow \quad R_c = \frac{\left(\rho_0\omega\cos^2(\frac{\varphi}{2})\right)^3}{\frac{3}{2}\rho_0^2\omega^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad R_c = \frac{2}{3}\rho_0\cos(\frac{\varphi}{2})$$

7. Les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$:

- $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{V}(M/\Re)}{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|} = -\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + con\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi$

- Le mouvement de M se fait dans le plan (xOy), donc $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ $\in$(xOy), d'où $\vec{b} = \vec{k}$ car $\vec{k} \perp \vec{\tau}$ et $\vec{k} \perp \vec{n}$

- $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau} = \vec{k} \wedge \vec{\tau} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e_\rho} - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e_\varphi}$

A chaque instant t, le point M appartient à un cercle tangent à la courbe de rayon $R_c = R_c(\varphi)$ et de centre C tel que $\vec{MC} = R_c\,\vec{n}$.

8.

Accélération tangentielle : $\vec{\gamma_t} = \frac{d\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|}{dt}\vec{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau}$; $s = 2\rho_0 \sin(\frac{\varphi}{2}) \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\rho_0\omega^2}{2}\sin(\frac{\varphi}{2})$

$\Rightarrow \quad \vec{\gamma_t} = \frac{\rho_0\omega^2}{2}\sin(\frac{\varphi}{2})\,\vec{\tau}$.

Accélération normale : $\vec{\gamma_n} = \frac{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|}{R_c}\vec{n} = \frac{\left(\rho_0\omega\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2}{\frac{2}{3}\rho_0\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\vec{n} = \frac{3}{2}\rho_0\omega^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{n}$

9. Application numérique ($\rho_0 = 50\text{cm}, \ \omega = 3.2\text{rad/s}$) :

- En A : $\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\| = \rho_0\omega = 1.6 \text{ m/s}$; $\left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \frac{3}{2}\rho_0\omega^2 = 7.5 \text{ m/s}^2$; $R_c = \frac{2}{3}\rho_0 = 0.33\text{m}$

- En B :
$\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\| = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho_0\omega = 1.38 \text{ m/s}$; $\left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \frac{\sqrt{7}}{2}\rho_0\omega^2 = 6.6 \text{ m/s}^2$; $R_c = \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_0 = 0.33\text{m}$

<u>Exercice 4.</u>

1. Accélération tangentielle : $\vec{\gamma_t} = \frac{d\left|\vec{V}(M/\Re)\right|}{dt}\vec{\tau} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{\tau} = a\,\vec{\tau}$

Accélération normale : $\vec{\gamma_n} = \frac{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|^2}{R_c}\vec{n}$

Le point M décrit un cercle de rayon R, donc le rayon de courbure R_c=R.

$$\vec{V}(M/\Re) = \frac{dS}{dt}\vec{\tau} \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}_n = \frac{\left(\frac{dS}{dt}\right)^2}{R}\vec{n} = \frac{(at+b)^2}{R}\vec{n}$$

2. Module de l'accélération de M :

$\vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$ ($\Re$ est le référentiel dans lequel M décrit le cercle).

$$\left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\|^2 = \left\|\vec{\gamma}_t\right\|^2 + \left\|\vec{\gamma}_n\right\|^2 = a^2 + \frac{(at+b)^4}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{\gamma}(M/\Re)\right\| = \sqrt{a^2 + \frac{(at+b)^4}{R^2}}$$