Université Mohamed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année universitaire 2015/2016
Filière SMIA

Contrôle de Mécanique du Point Matériel

Exercice 1 : (7 *points*)

Par rapport à un repère orthonormé direct R(O,xyz) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un point M mobile est repéré par ses coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) telles que :

$$\rho = a \quad , \quad \varphi(t) = \omega t \quad , \quad z = a\varphi(t);$$ où a et ω sont des constantes positives.

Tous les vecteurs doivent être exprimés dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ associée au système de coordonnées cylindriques de M.

1) Exprimer le vecteur position, $\vec{OM}$, du point M dans le repère R.

2) Déterminer le vecteur vitesse instantanée, $\vec{V}(M/R)$, de M en fonction du temps t. En déduire son module.

3) Montrer que la tangente à la trajectoire de M fait un angle α constant avec l'axe $\vec{Oz}$. Donner la valeur de l'angle α.

4) Déterminer le vecteur accélération instantanée, $\vec{\gamma}(M/R)$, de M.

5) Calculer l'accélération tangentielle γ_t et normale γ_n du point M en fonction du temps t. En déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire de M.

6) Quel est l'hodographe du mouvement de M ?

Exercice 2 : (*6 points*)

Dans le plan (xOy) d'un repère galiéen R(O,xyz) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un point matériel M se déplace dans le champ de force de la forme :

$$\vec{F} = x^2\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}.$$

1) Calculer le travail de la force $\vec{F}$ dans les trois cas suivants :

a) M se déplace en ligne droite à partir du point O(0,0) jusqu'au point A(1,1).

b) M se déplace de O(0,0) au point A(1,1) en suivant la parabole d'équation $y=x^2$.

c) M se déplace de O(0,0) vers A(1,1) suivant le trajet OBA sachant que B(1,0) est la projection orthogonale de A sur l'axe Ox.

2) Le travail de la force $\vec{F}$ dépend-il du chemin suivi par la particule M entre O et A ? si oui, calculer l'énergie potentielle dont dérive la force $\vec{F}$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 : *(7 points)*

Dans un repère galiléen $R_0(O, XYZ)$ de base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, un point M de masse m se déplace sur un cercle (C) horizontal rigide de rayon a et de centre 0_1. A l'instant initial, le cercle (C) se trouve dans le plan (XOY), son centre O_1 est confondu avec O. Le cercle (C) est muni d'un mouvement de translation dans la direction OZ telle que $\overrightarrow{OO_1} = a \sin \varphi(t) \vec{K}$. On désigne par $R_1(O_1, xyz)$ le repère relatif de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de telle sorte que le cercle (C) se trouve à tout instant dans le plan (xOy). Le repère R_1 est en mouvement de translation par rapport au repère R_0. On désigne par $\varphi(t)$ l'angle formé par le vecteur position $\overrightarrow{O_1M}$ et l'axe $\overrightarrow{O_1x}$ (voir figure 1).

Tous les vecteurs seront exprimés dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ associée aux coordonnées cylindriques du point M.

1°) Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

2°) Exprimer les vecteurs vitesse relative $\vec{V}_r(M)$ et accélération relative $\vec{\gamma}_r(M)$ de M.

3°) Exprimer le vecteur vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(M)$ du point M.

4°) Déterminer les vecteurs accélérations d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$ du point M.

5°) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à M dans le repère relatif R_1. En déduire les trois équations différentielles du mouvement de M.

6°) Déterminer les composantes R_ρ, R_φ et R_z de la réaction du cercle sur M dans le cas où $\varphi(t) = \omega t$. ω est une constante positive et t désigne le temps.

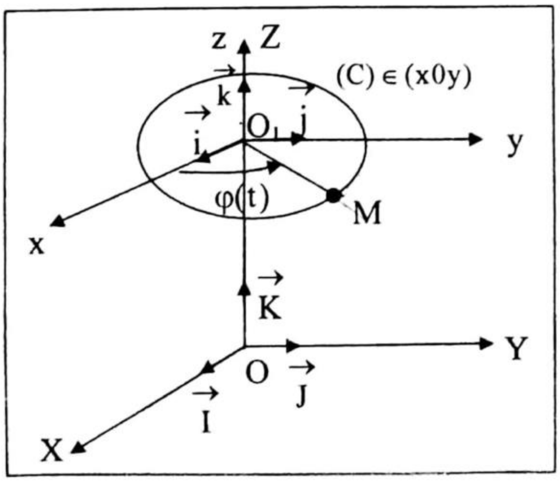

Figure 1