Chapitre V: ENERGETIQUE

I- Notion de travail

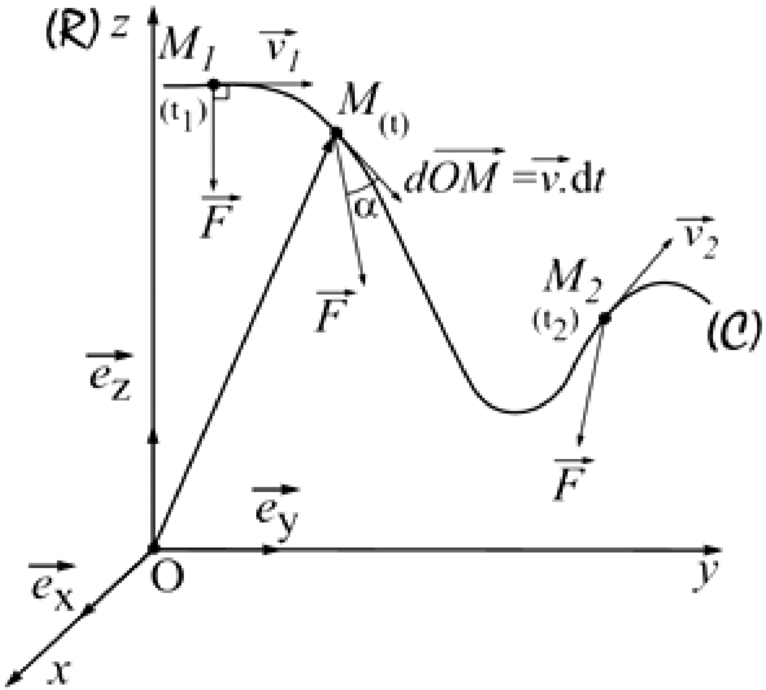
Soit un point matériel M qui se déplace sur une trajectoire et soit la force résultante $\vec{F}$ qui s'exerce sur M à l'instant t.

◇ **Définition : Travail élémentaire** (unité : le Joule $[J]$)

- fourni par la force $\vec{F}$
- au point M
- pendant la durée $\mathrm{d}t$ (entre t et $t+\mathrm{d}t$) :

$$\delta W \equiv \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}\mathrm{d}t$$

- Si $\delta W > 0$, le travail élémentaire est **moteur** ;
- si $\delta W < 0$, le travail élémentaire est **résistant**.
- Lorsque $\vec{F} \perp \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \vec{F} \perp \mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ on dit que la force $\vec{F}$ ne travaille pas entre t et $t+\mathrm{d}t$: $\delta W = 0$.



Chapitre V: ENERGETIQUE

Rq 1 : $\delta W = \| \overrightarrow{F} \| . \| \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \| \cos\alpha$

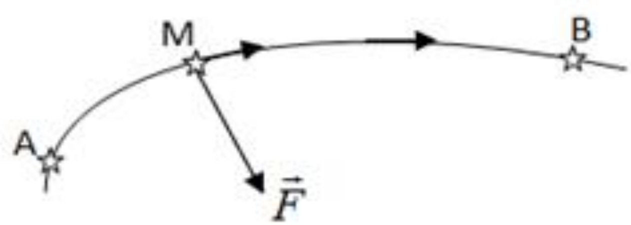
avec $\| \overrightarrow{F} \| \cos\alpha$ qui représente la projection orthogonale de $\overrightarrow{F}$ sur la direction du déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

Rq 2 : Dimension d'un travail (élémentaire) : $[\delta W] = [F][\mathrm{d}r] = [m][a][\mathrm{d}r] = M.LT^{-2}.L$, soit : $[\delta W] = ML^2T^{-2}$

Rq 3 : Expressions du travail élémentaire en fonction de la base de projection choisie :

$$\begin{aligned}
\delta W &= F_x.\mathrm{d}x + F_y.\mathrm{d}y + F_z.\mathrm{d}z && \leftarrow \text{base cartésienne} \\
&= F_r.\mathrm{d}r + F_\theta.r\mathrm{d}\theta + F_z.\mathrm{d}z && \leftarrow \text{base cylindrique} \\
&= F_r.\mathrm{d}r + F_\theta.r\mathrm{d}\theta + F_\varphi.r\sin\theta\mathrm{d}\varphi && \leftarrow \text{base sphérique}
\end{aligned}$$

Travail d'une force pour un déplacement fini



$$W_{A\to B} = \int_{AB} \vec{F}.d(\overrightarrow{OM})$$

Chapitre V: ENERGETIQUE

II- Définitions

1- Définition de la puissance :

La puissance est la rapidité avec laquelle le travail est effectué sous l'action d'une force.
Si dt est le temps effectué par cette force pour déplacer le mobile de $d\vec{r}$, la puissance est donnée par:

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad or \quad dW = \vec{F}.d\vec{r} \quad \rightarrow \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} / R = \vec{F}.\vec{V}(M / R)$$

$$\mathrm{P} = \vec{\mathrm{F}}.\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M} / \mathrm{R}) \qquad \text{Unité Watt,(symbole : W)}$$

2-Définition de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique notée E_c est défini par : $E_C = \frac{1}{2} m V^2_{(M/R)}$

III- Théorèmes de la puissance et théorème de l'énergie cinétique

1- Enoncé du théorème de la puissance

La puissance des forces appliquées est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique.

$$\mathrm{P} = \vec{\mathrm{F}}.\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M} / \mathrm{R}) = \frac{dE_c}{dt}$$

Chapitre V: ENERGETIQUE

2- Enoncé de théorème de l'énergie cinétique :

Dans un référentiel galiléen, entre l'instant initial t_i où le point matériel est en A et le temps t_f où le point matériel est en B, la variation de l'énergie cinétique correspond à la somme des travaux des forces de A à B.

$$E_C(B/R) - E_C(A/R) = W_{A\to B}(\vec{F}_R)$$

3- Théorème de la puissance et théorème de l'énergie cinétique dans R' non galiléen:

a) Enoncé du théorème de la puissance dans R':

La puissance des forces réelles et des forces imaginaires appliquée à M est égale à la dérivée/temps de l'énergie cinétique (dans R')

Le PFD de M dans R' : $\vec{F}_e + \vec{F}_c + \vec{F}_R = m\vec{\gamma}(M/R')$

$$m\left.\frac{\vec{V}(M/R')}{dt}\right|_{R'} .\vec{V}(M/R') = \vec{F}_e.\vec{V}(M/R') + \vec{F}_c.\vec{V}(M/R') + \vec{F}_R.\vec{V}(M/R')$$

$\vec{F}_c.\vec{V}(M/R') = 0$ donc $\dfrac{d(\frac{1}{2}mV^2(M/R'))}{dt} = \vec{F}_e.\vec{V}(M/R') + \vec{F}_R.\vec{V}(M/R')$

$\left.\dfrac{dE_C}{dt}\right|_{R'}$ = La puissance des forces réelles et des forces imaginaires appliquée à M dans le repère R'.

$$\frac{dE_C(M/R')}{dt} = P(\vec{F}_R) + P(\vec{F}_e)$$

Chapitre V: ENERGETIQUE

b) Théorème de l'énergie cinétique dans R':

$$d(E_C(M/R')) = P(\vec{F}_R)dt + P(\vec{F}_e)dt$$

$$d(E_C(M/R')) = dW(\vec{F}_R) + dW(\vec{F}_e)$$

$$donc \; E_C(B/R') - E_C(A/R') = W_{A \to B}(\vec{F}_R) + W_{A \to B}(\vec{F}_e)$$

Chapitre V: ENERGETIQUE

IV- Systèmes conservatifs- Champ de force - Energie potentielle

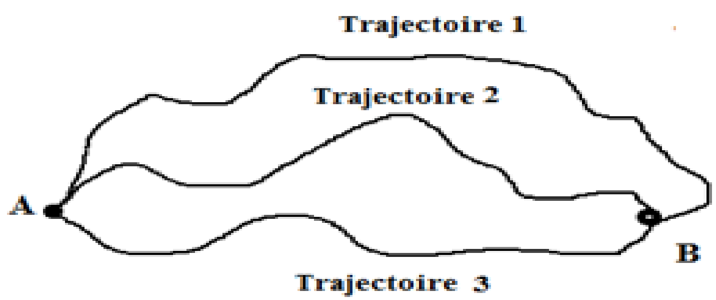
1-Champ de force

Définition : Un champ de force est une zone où se manifeste un système de forces sur un point matériel. La force exercée sur un point matériel dans ce champ de force ne dépend que de la position de M et du temps, on le note $\vec{F}(\overrightarrow{OM}, t)$

Si le champ de force ne dépend pas du temps, le champ de force est *statique*.
Si le champ de force ne dépend pas de la position de M, ce champs est *uniforme*

2-Champ de forces conservatif

Soit M un point matériel qui se déplace d'un point A (point départ) vers un point B (point d'arrivée) sur une trajectoire quelconque.



Si $\underset{Trajet 1}{W_{A\to B}(\vec{F})} = \underset{Trajet 2}{W_{A\to B}(\vec{F})} = \underset{Trajet 3}{W_{A\to B}(\vec{F})}$

donc : Le travail de $\vec{F}$ ne dépend pas du chemin suivi, il ne dépend que de la position initiale et de la position finale. Cette force sera notée $\vec{F}_c$; elle est dite conservative.

Chapitre V: ENERGETIQUE

3-Energie potentielle

a- Définition

On définit l'énergie potentielle uniquement pour les forces conservatives par :

$dU = -dW(\vec{F}_c)$ $\qquad$ $\vec{F}_c$ =force conservatrice

Variation d'énergie potentielle entre 2 positions A et B :

$$U(B) - U(A) = -\int_A^B \vec{F}_C . d\vec{M}$$

Si on choisit une origine du potentiel nul (U(A)=0), on dit que l'énergie potentielle est définie à une constante additive près.

On sait que $dU = -\vec{F}_C . d\vec{M}$ pour un champ de force conservatif

dU est la différentielle de U et on a montré que $dU = \vec{g}radU . d\vec{M}$

On en déduit que la force $\vec{F}c$ *peut* s'écrire: $\overrightarrow{Fc} = -\overrightarrow{grad}\, U$

si la force vérifie $\overrightarrow{rot}\, \vec{F} = 0$ alors il existe U *telque*

$\vec{F}c = -\overrightarrow{grad}\, U$

$(\overrightarrow{rot}\, \vec{F}c = -\overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{grad}\, U = 0)$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de force dérive d'une énergie potentielle est que

$$\vec{R}ot\, \vec{F} = \vec{0}$$

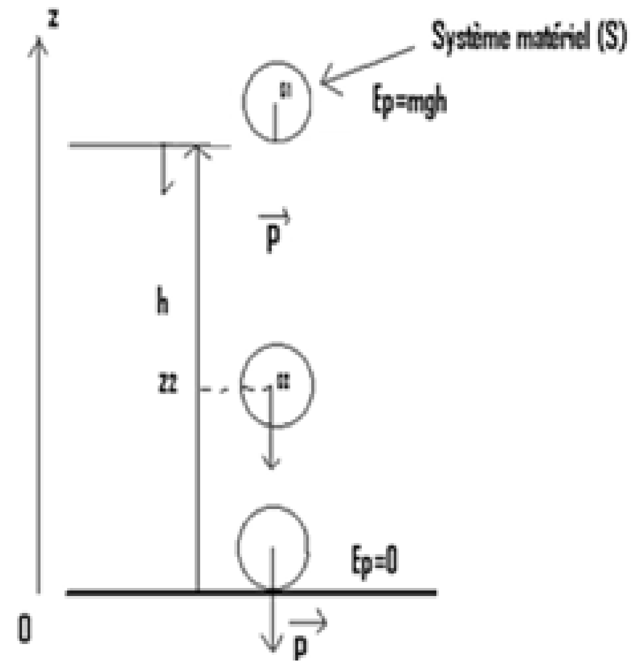
c- **Exemple : énergie potentielle de pesanteur**

Un objet, tenu immobile à t<0 à une hauteur h_0 du sol, et lâché à t=0 sans vitesse initiale.

Un exemple simple est celui d'un corps terrestre tenu en hauteur

Cet objet est supposé soumis à la seule force de son poids :

$$\vec{P} = -m.g.\vec{k}$$



Son énergie potentielle est donnée par :

$$E_p(M) = -\int \vec{P}.d\vec{r} = -\int -mgdz = mgz + C^{ste}$$

$$d\vec{r} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$$

$$\vec{P} = -m\,g\,\vec{k}$$

si on prend

$$E_p(0) = 0 \rightarrow C^{ste} = 0$$

$$E_p(M) = m\,g\,z$$

le point matériel possède une énergie potentielle de pesanteur du fait de sa hauteur.

Chapitre V: ENERGETIQUE

V-Energie mécanique d'un mobile en mouvement dans R

Définition : On appelle énergie mécanique d'un point matériel, la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle

L'énergie mécanique est donnée par : Em = Ec+Ep

1- Cas de systèmes soumis à des forces conservatives

Soit un mobile plongé dans un champ de force conservatif ($\vec{F}_R$ = conservative)

$$\Delta U_{A\to B} = U(B) - U(A) = -\int_A^B \vec{F}_R d\vec{r} \leftrightarrow F_R \text{ conservative}$$

$$\Delta E_{C\,A\to B} = E_C(B) - E_C(A) = \int_A^B \vec{F}_R d\vec{r} \quad \text{théorème de l'énergie cinétique}$$

Soient A et B deux positions occupées par le point matériel M entre deux instants t_A et t_B

$$\Delta E_{C\,A\to B} = -\Delta U_{A\to B} \leftrightarrow E_C(B) - E_C(A) = U(A) - U(B)$$

$$E_C(B) + U(B) = E_C(A) + U(A) = C^{ste} = E_m$$

Théorème : L'énergie mécanique d'un point matériel soumis à des forces conservatives reste constante au cours du mouvement ; on dit que l'énergie mécanique se conserve.

Dans un tel cas, si on connait l'expression de Em, on peut obtenir par dérivation l'équation différentielle du mouvement.

Chapitre V: ENERGETIQUE

2- cas d'un système soumis à des forces conservatives et non conservatives.

En présence de forces non conservatives en aura :

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{conser} + \vec{F}_{non\ conser}$$

le théorème de variation de l'énergie cinétique donne :

$$W_{net} = W_c + W_{n.c} = \Delta E_c$$

et comme $\Delta E_p = -W_c$, on peut écrire :

$$-\Delta E_p + W_{n.c} = \Delta E_c$$

$$E_p(1) - E_p(2) + W_{n.c} = E_c(2) - E_c(1)$$

d'où on tire :

$$W_{n.c} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

et le théorème de variation de l'énergie mécanique :

$$\boxed{W_{n.c} = \Delta E_m}$$

La variation d'énergie mécanique d'un système, soumis à des forces conservatives et non conservatives, est égale au travail des forces non conservatives le long du trajet (1.2)