Chapitre III

Cinématique du point matériel

I-Définitions

Cinématique **:** C'est l'étude du mouvement des corps indépendamment des causes qui les produisent.

Point matériel **:** c'est un solide dont les dimensions sont très petites par rapport à l'échelle à laquelle on se place et par rapport aux conditions du problème.

- La position et le mouvement d'un point matériel peuvent être décrits à l'aide de trois coordonnées qui sont définis à partir d'un repère.

Repère **:** tout système d'axes rigidement liés à un solide, permettant de définir la position des corps dans l'espace**.**

Référentiel : L'association d'un repère d'espace et d'une échelle de temps permettant de *repérer les durées. On le note R*

Mouvement : un mobile en mouvement occupe une position différente à chaque instant, ses coordonnées sont donc fonction du temps et s'écrivent :

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

II- Trajectoire et Equations paramétriques

Soit un point matériel repéré dans un repère (système d'axes). La trajectoire de M par rapport au repère R est l'ensemble des positions occupées par ce dernier quand le temps s'écoule d'une façon continue.

$$\text{Soit M repéré dans } R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right) \qquad \overrightarrow{OM}\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ sont les équations paramétriques de M .

Pour déterminer l'équation de la trajectoire, on cherche une relation entre $x, y\ et\ z$ indépendante du temps.

Exemple

$$\begin{cases} x(t) = 1 + a\cos\left(wt\right) \\ y(t) = a\sin\left(wt\right) \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad \text{mouvement plan car } z = constante$$

$$\begin{cases} x-1 = a\cos(wt) \\ y = a\sin(wt) \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = a^2 \ \ et \ \ z=0 \\ la \ \ trajectoire \ \ est \ \ un \ cercle \ \ de \ \ rayon \\ a \ \ et \ \ de \ \ centre \ (1,0,0) \end{cases}$$

<u>En coordonnées cartésiennes</u>

M Est repéré dans le repère $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$\overrightarrow{OM}(t) = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k} \qquad (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est une base fixe*

$x(t)$, $y(t)$ *et* $z(t)$ sont les trois paramètres du mouvement

<u>En coordonnées cylindriques</u>

M Est repéré dans le repère $R\left(O,\vec{e_\rho}(t),\vec{e_\varphi}(t),\vec{e_z}\right)$

$\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t).\vec{e}_\rho\left(\varphi(t)\right) + z(t).\vec{e}_z \quad , \vec{e}_z = \vec{k}$

$\rho(t)$, $\varphi(t)$ *et* $z(t)$ sont les trois paramètres du mouvement

<u>En coordonnées sphériques</u>

M Est repéré dans le repère $R(O,\vec{e}_r(t),\vec{e}_\theta(t),\vec{e}_\varphi(t))$

$\overrightarrow{OM}(t) = r(t).\,\vec{e}_r\left(\theta(t)\right),\varphi(t))$

$r(t)$, $\theta(t)$ *et* $\varphi(t)$ sont les trois paramètres du mouvement

<u>Important :</u>

- La construction des 3 paramètres de M en fonction du temps donne la trajectoire de M.
- La notion de mouvement est relative $\Rightarrow$ il faut toujours préciser le référentiel dans lequel on étudie le mouvement.

<u>III- Vitesse d'un point matériel</u>

Définition : Soit un point matériel M repéré par son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (O : origine du repère) et en mouvement par rapport au repère *R*. Le vecteur vitesse et de *M* par rapport à *R* est donné par *:*

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

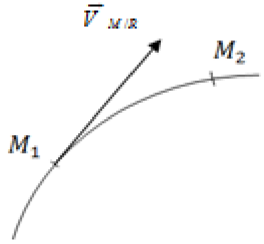
Si le point M occupe la position M_1 à l'instant t_1 et la position M_2 à l'instant t_2

$$\vec{V}(M)=\frac{\overrightarrow{OM}_2-\overrightarrow{OM}_1}{t_2-t_1}=vitesse\,moyenne\,(approchée)$$

- La vitesse instantanée (à un instant t donné)

$$\vec{V}_{M/R}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{OM}_2-\overrightarrow{OM}_1}{\Delta t}\quad,\ \Delta t=t_2-t_1$$

$$\vec{V}_{M/R}=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$



→ la direction du vecteur vitesse est tangente à la trajectoire en chaque point.

→ Le sens de $\vec{V}_{M/R}$ est le sens du mouvement

III-1 Expression du vecteur vitesse dans le système de coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

$$\vec{V}_{M/R}=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R=\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_R\vec{i}+\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_R\vec{j}+\left.\frac{dz(t)}{dt}\right|_R\vec{k}$$

$\vec{i},\vec{j}\,et\,\vec{k}$ sont fixes dans R

$$\boxed{\vec{V}_{M/R}=\dot{x}(t).\vec{i}+\dot{y}(t).\vec{j}+\dot{z}(t).\vec{k}}$$

III- 2- Expression du vecteur vitesse dans le système de coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM}(t)=\rho(t)\vec{e}_\rho\left(\varphi(t)\right)+z(t)\vec{e}_z$$

$$\vec{V}_{(M/R)}=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R=\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho+\rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$, ($\vec{k}$ est fixe dans R, $\frac{d\vec{k}}{dt}=0$)

$$\vec{e}_\rho=\vec{e}_\rho(\varphi)=\vec{e}_\rho\left(\varphi(t)\right)$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}=\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt}=\vec{e}_\rho.\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

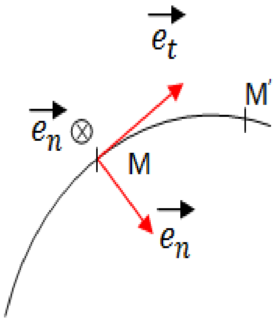
Donc :

$$\boxed{\vec{V}_{(M/R)}=\dot{\rho}\vec{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi+\dot{z}\vec{k}}$$

III- 3 Expression du vecteur vitesse dans le système de coordonnée sphériques

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t).\vec{e}_r\left(\theta(t)\right),\varphi(t))$$

$$\vec{V}_{(M/R)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{dr}{dt}\right|_R \vec{e}_r + r\left.\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_R$$



$\vec{e}_r$ dépend de θ et φ $\quad d\vec{e}_r = \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}d\varphi$

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \vec{e}_\theta \ , \ \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = \frac{\partial(\cos\theta.\vec{k} + \sin\theta.\vec{e}_\rho)}{\partial\varphi} = \sin\theta\vec{e}_\varphi$$

Donc : $$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}.\vec{e}_\theta + \sin\theta.\dot{\varphi}.\vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{V}_{(M/R)} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta.\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}$$

III-4 Expression du vecteur vitesse dans le repère de Serret-Frenet

Définition : le repère de Serret-Frenet est un repère dont l'origine est située sur la trajectoire de M à chaque instant (t).

La base de repère est donnée par les trois vecteurs $\left(\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_b\right)$.

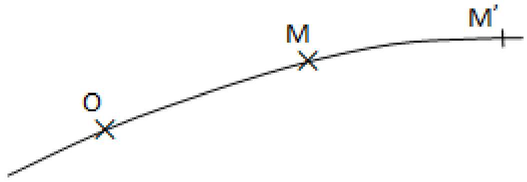
$$\begin{cases} \vec{e}_t \ : \textit{vecteur unitaire tangente à la trajectoire} \\ \vec{e}_n \ : \textit{vecteur unitaire directement normale à } \vec{e}_t \textit{ et dirigé vers le} \\ \textit{centre de courbure de la trajectoire} \\ \vec{e}_b \perp plan\left(\vec{e}_t, \vec{e}_n\right), \vec{e}_b = \vec{e}_t \wedge \vec{e}_n \ et \ \left(\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_b\right) \ \textit{trièdre directe} \\ (\vec{e}_t, \vec{e}_n) \text{ s'appel plan osculateur} \end{cases}$$

NB : le repère de Serret-Frenet est un repère local lié à M

a-abscisse curviligne:

Sur la trajectoire, la quantité $\left\|\vec{V}_{M/R}\right\|$ représente la distance parcourue par unité du temps. A cette distance on donne le nom de distance curviligne. Elle est définie sur une courbe qui peut présenter une forme quelconque.

L'abscisse curviligne est définie par $\frac{ds}{dt} = \left\| \vec{V} \right\|$



L'abscisse curviligne de M est la longueur de l'arc $\widehat{OM}$ sur la trajectoire.

à l'instant $t \rightarrow M$

à l'instant $t' = t + \Delta t \rightarrow M'$ $\widehat{MM'} = \widehat{OM'} - \widehat{OM}$

$\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta t = dt$ $\widehat{MM'}.ds = \overrightarrow{dM}$ Déplacement élémentaire dans le repère de Serret-Frenet.

b-Expression de la vitesse :

Le vecteur vitesse est tangente à la trajectoire en chaque point (en chaque position de M sur la trajectoire).

$\vec{e}_t = \frac{\vec{V}_{(M/R)}}{\left\| \vec{V} \right\|}$, $\vec{e}_t$ (Est vecteur unitaire) donc : $\boxed{\vec{V}_{(M/R)} = \left\| \vec{V} \right\| . \vec{e}_t = \frac{dS(t)}{dt} \vec{e}_t}$

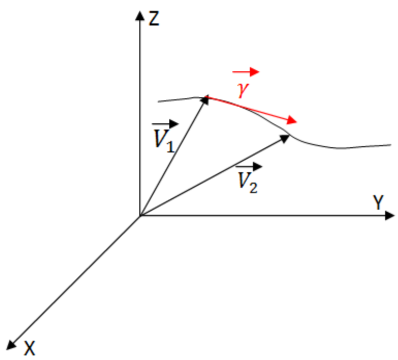
IV-Accélération d'un point matériel

Définition : l'accélération d'un point est le vecteur, noté $\vec{\gamma}_{(M/R)}$ donnée par **:**

$$\vec{\gamma}_{(M/R)} = \left. \frac{d\vec{V}_{M/R}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{d^2 t} \right|_R$$

Ce vecteur nous renseigne sur la manière avec laquelle varient la norme et la direction du vecteur vitesse.

Il renseigne sur la concavité de la trajectoire (dérivée seconde), il est tangent à l'extrémité du vecteur vitesse (il n'est pas tangent à la trajectoire).



Définition: l'hodographe d'un point matériel dans un référentiel est l'ensemble des points P définis par :

$\overrightarrow{OP} = \vec{V}_{M/R}$. L'accélération est tangente à l'hodographe à l'instant t.

On peut définir aussi :

$\vec{\gamma}_{(M/R)} = \dfrac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1}$: Accélération moyenne

$\vec{\gamma}_{(M/R)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\dfrac{\Delta V}{\Delta t}\right) = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d^2(\overrightarrow{OM})}{d^2 t}$: Accélération instantanée

IV-1 Expression de l'accélération dans le système de coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{V}_{M/R} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \qquad (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ est fixe}$$

$$\vec{\gamma}_{(M/R)} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$$

IV-2 Expression de l'accélération dans le système de coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \quad , \vec{e}_z = \vec{k}$$

$$\vec{V}_{(M/R)} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}_{(M/R)} = \frac{d\vec{V}_{M/R}}{dt} = \frac{d\left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}\right)}{dt}$$

- $\dfrac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho)}{dt} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}.\dfrac{d\varphi}{dt} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \ , \ \left(\dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi\right)$
- $\dfrac{d(\rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)}{dt} = \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}.\dfrac{d\varphi}{dt} \quad , \dfrac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_\rho$

  $= \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\left(\dot{\varphi}\right)^2\vec{e}_\rho$
- Et $\dfrac{d(\dot{z}\vec{k})}{dt} = \ddot{z}\vec{k} \ , \ \vec{k} = \vec{e}_z \ \ fixe\ dans\ R$

$$\boxed{\vec{\gamma}_{(M/R)} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}}$$

autre écriture (faire le calcul) : $\vec{\gamma}_{(M/R)} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}$

IV-3 Expression de l'accélération dans le système de coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$$

$$\vec{V}_{(M/R)} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}_{M/R} = \frac{d\vec{V}_{(M/R)}}{dt}$$

- $\dfrac{d\left(\dot{r}\vec{e}_r\right)}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}$, $\left(\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}\right)$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

- $\dfrac{d\left(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)}{dt} = \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

  - $d\vec{e}_\theta = \dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}d\theta + \dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi}d\varphi = -\vec{e}_r d\theta + \cos\theta.d\varphi.\vec{e_\varphi}$

  - $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e_\varphi}$

- $\dfrac{d\left(r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi\right)}{dt} = \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dfrac{d(\sin\theta)}{dt}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$

$$\frac{d\sin\theta}{dt} = \dot{\theta}\cos\theta \;,\; \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho = -\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_r$$

Travail à faire **:** donner l'expression finale de $\vec{\gamma}_{M/R}$

IV-4 Expression de l'accélération dans le repère de Serret-Frenet

$$\vec{V}_{(M/R)} = \left\|\vec{V}\right\|.\vec{e}_t = \frac{dS}{dt}.\vec{e}_t$$

$$\vec{\gamma}_{M/R} = \frac{d(\vec{V}_{(M/R)})}{dt} = \frac{d\left\|\vec{V}_M\right\|}{dt}.\vec{e}_t + \left\|\vec{V}\right\|.\left.\frac{d\vec{e}_t}{dt}\right|_M$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{dS}.\frac{dS}{dt} = \left\|\vec{V}\right\|.\frac{d\vec{e}_t}{dS}$$

D'autre part : $\vec{e}_t$ est un vecteur unitaire, $\vec{e}_t.\vec{e}_t = \left\|\vec{e}_t\right\|.\left\|\vec{e}_t\right\|.\cos 0 = 1$

$$\rightarrow \frac{d(\vec{e}_t.\vec{e}_t)}{ds} = 0 = 2\vec{e}_t.\frac{d\vec{e}_t}{dS}$$

$$\rightarrow \vec{e}_t \perp \frac{d\vec{e}_t}{dS}$$

Or $\vec{e}_n$ vecteur unitaire $\perp$ à $\vec{e}_t$ $\rightarrow$ donc $\vec{e}_n$ peut être définie par : $\vec{e}_n = \dfrac{d\vec{e}_t / dS}{\left\| \dfrac{d\vec{e}_t}{dS} \right\|} = R_C \cdot \dfrac{d\vec{e}_t}{dS}$

On note $R_C = \dfrac{1}{\left\| \dfrac{d\vec{e}_t}{dS} \right\|}$ appelé rayon de courbure

$$\rightarrow \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{\|\vec{V}\|}{R_C}.\vec{e}_n$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_{M/R} = \frac{d\|\vec{V}_M\|}{dt}.\vec{e}_t + \frac{|V_{M/R}|^2}{R_C}.\vec{e}_n}$$

- $\dfrac{d\|\vec{V}_M\|}{dt}.\vec{e}_t$: accélération tangentielle ; indique comment varie le module de la vitesse.
- $\dfrac{|V_{M/R}|^2}{R_C}.\vec{e}_n$: accélération normale ; indique comment varie la direction de la vitesse.

Important : l rayon de courbure R_C nous renseigne sur la nature de la trajectoire

- Si $R_C \rightarrow +\infty$ le mouvement est rectiligne $\dfrac{d\vec{e}_t}{dS} = 0$
- Si $R_C = cste$ le mouvement est circulaire $\dfrac{d\vec{e}_t}{dS} = cste$
- Si $R_C = R_C(t)$ le rayon de courbure fonction du temps $\dfrac{d\vec{e}_t}{dS} = f(t) \rightarrow$ mouvement curviligne.

Calcul du rayon de courbure de la trajectoire

a. Première méthode :

On a $\vec{\gamma}_{M/R} = \gamma_t.\vec{e}_t + \gamma_n.\vec{e}_n$

$$|\gamma_{M/R}|^2 = |\gamma_t|^2 + |\gamma_n|^2 \rightarrow \gamma_n = \sqrt{(\gamma_{M/R})^2 - (\gamma_t)^2} \qquad (1)$$

Or $\gamma_n = \dfrac{\|V_{M/R}\|^2}{R_C}$ (2)

(1) et (2) $\rightarrow R_C = \dfrac{\|\vec{V}_{M/R}\|^2}{\sqrt{(\gamma_{M/R})^2 - (\gamma_t)^2}}$

b. Deuxième méthode :

$$\vec{V}_{(M/R)} = \|\vec{V}_{M/R}\|.\vec{e}_t$$

$$\vec{V}_{(M/R)} \wedge \vec{\gamma}_{(M/R)} = \left\|\vec{V}_{M/R}\right\| .\gamma_n .\left(\vec{e_t} \wedge \vec{e_n}\right)$$

$$= \frac{\left\|\vec{V}_{M/R}\right\|^3}{R_C} .\vec{e_b} \qquad \left(\vec{e_t}, \vec{e_n}, \vec{e_b}\right) \text{ trièdre}$$

$$\left\|\vec{V}_{(M/R)} \wedge \vec{\gamma}_{(M/R)}\right\| = \frac{\left\|\vec{V}_{M/R}\right\|^3}{R_C} \quad \rightarrow \quad R_C = \frac{\left\|\vec{V}_{M/R}\right\|^3}{\left\|\vec{V}_{(M/R)} \wedge \vec{\gamma}_{(M/R)}\right\|}$$

Selon les données du problème, on utilise la première ou la deuxième méthode.

V- Exemples de mouvements

V-1 Mouvement rectiligne uniforme

On dit qu'un point matériel animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport au repère R si sa trajectoire dans ce repère est rectiligne et sa vitesse est une constante.

$$\vec{V}_{(M/R)} = \overrightarrow{cste} = \vec{V_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R \rightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{V_0}t + \overrightarrow{OM}_0$$

$\overrightarrow{OM}_0$: Vecteur position à l'instant *t=0*

V-2 Mouvement rectiligne uniformément varié

C'est un mouvement qui possède une trajectoire rectiligne et une accélération constante.

$$\vec{\gamma}_{(M/R)} = \overrightarrow{cste} = \vec{\gamma_0} = \frac{d\vec{V}_{M/R}}{dt}$$

$$\vec{V}_{M/R} = \vec{\gamma}_0 t + cte = \vec{\gamma}_0 t + \vec{V_0} \quad \left(\vec{V_0}\, vitesse\, à\, t = 0\right)$$

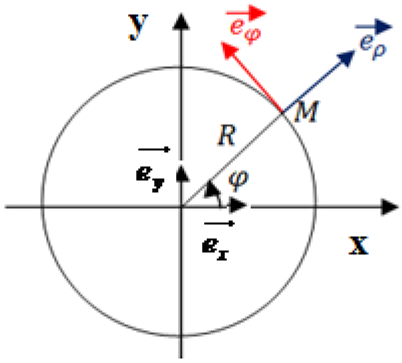
$$\vec{V}_{(M/R)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R \rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{\gamma}_0 t^2 + \vec{V_0}t + cste$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{\gamma}_0 t^2 + \vec{V_0}t + \overrightarrow{OM}_0 \quad \left(\overrightarrow{OM}_0 \; position \; à \; t = 0\right)$$

V- 3 Mouvement circulaire

Le point matériel se déplace sur un cercle (C) de rayon R et de centre O, le mouvement se fait dans un plan (XOY).

En coordonnées polaires nous avons $\overrightarrow{OM} = R\vec{e_\rho}$



$$\vec{V}_{M/R} = R\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = R\frac{d\vec{e_\rho}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = R\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} \ , \ R = cste$$

φ: abscisse angulaire (angle polaire)

$\dot{\varphi}$: vitesse angulaire de rotation

$$\vec{V}_{M/R} = R\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} = R\dot{\varphi}\vec{e_z}\Lambda\vec{e_\rho} = \dot{\varphi}\vec{e_z}\Lambda R\vec{e_\rho} = \dot{\varphi}\vec{e_z}\Lambda\vec{OM}$$

On définit le vecteur vitesse et de rotation $\vec{w}$ par :

- Norme : $\|\vec{w}\| = \frac{d\varphi}{dt}$
- Direction : axe de rotation
- Sens : tire-bouchon dans le sens du mouvement
- $\vec{w} = \dot{\varphi}\vec{k}$

donc $$\vec{V}_{M/R} = \vec{w} \wedge \vec{OM}$$

<u>Expression de l'accélération dans un mouvement circulaire</u>

On a $\vec{V}_{M/R} = \vec{w} \wedge \vec{OM}$

$$\vec{\gamma}_{M/R} = \frac{d\vec{V}_{M/R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{w} \wedge \vec{OM}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\vec{k} \wedge R\vec{e_\rho}\right)$$

$$\vec{\gamma}_{M/R} = \ddot{\varphi}\vec{k} \wedge R\vec{e_\rho} + \vec{w} \wedge \vec{V}_{M/R} = \ddot{\varphi}\vec{k} \wedge R\vec{e_\rho} + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{OM}\right)$$

$$= \ddot{\varphi}\vec{k} \wedge R\vec{e_\rho} + \left(\vec{w}.\vec{OM}\right).\vec{w} - \left(\vec{w}.\vec{w}\right).\vec{OM} \qquad ,\left(\vec{w}.\vec{OM} = 0\ \right)$$

<u>Rappel</u> : $\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \left(\vec{A}.\vec{C}\right).\vec{B} - \left(\vec{A}.\vec{B}\right).\vec{C}$

$$\vec{\gamma}_{M/R} = \ddot{\varphi}\vec{k} \wedge R\vec{e_\rho} - Rw^2\vec{e_\rho}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_{M/R} = R\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi} - Rw^2\vec{e_\rho} \quad , w^2 = (\dot{\varphi})^2}$$

- $R\ddot{\varphi}$: Composante orthogonale de $\vec{\gamma}_{M/R}$
- $-Rw^2$: Composante normale de $\vec{\gamma}_{M/R}$

<u>Important :</u>

Pour un mouvement circulaire, on peut utiliser aussi la base de Serret-Frenet avec la correspondance :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_\rho} = -\overrightarrow{e_n} \\ \overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_t} \end{cases}$$

$\vec{\gamma}_{M/R} = Rw^2\overrightarrow{e_n} + R\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_t}$, Dans la base de Serret-Frenet :

$\vec{\gamma}_{M/R} = \overrightarrow{\gamma_n} + \overrightarrow{\gamma_t}$ (Somme d'une accélération normale et une accélération tangentielle)

Dans le cas où le mouvement est circulaire uniforme :

$\vec{V}_{M/R} = \dfrac{d\vec{w}}{dt} = 0$, $w = cte \to \ddot{\varphi} = 0$, $(\gamma_t = 0$ et $\gamma_n \neq 0)$

L'accélération de vient : $\vec{\gamma} = -w^2R\overrightarrow{e_\rho} = +w^2R\overrightarrow{e_n}$