Opérateurs Vectoriels

7.2 Opérateur gradient

Définition 7.7 *Soit f une fonction de classe* C^1 *définie sur un ouvert U, il existe un unique champ de vecteur, que l'on appelle le* gradient *de f et que l'on note* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, *tel que:*

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

Expression en coordonnées cartésiennes. Comme $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$, le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ a pour coordonnées cartésiennes :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Notation : On définit l'opérateur Nabla en cartésiennes par :

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}.$$

de sorte que, appliqué à une fonction f différentiable, $\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$. Notons que cet opérateur est linéaire : $\overrightarrow{\nabla}(f + \lambda g) = \overrightarrow{\nabla} f + \lambda \overrightarrow{\nabla} g$, avec f et g deux fonctions différentiables et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Opérateurs Vectoriels

Expression en coordonnées cylindriques. L'espace est muni des coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) où l'on considère une fonction quelconque $F(\rho,\varphi,z)$. On a:

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z$$

et :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}.$$

Or

$$\mathrm{d}F = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

d'où, par identification :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F = \frac{\partial F}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{e_z}.$$

Définitions préalables

1 Temps

Le temps est une grandeur scalaire mesurée par une horloge. Cette horloge est fondée sur un processus cyclique qui se répète d'une manière identique. Il devient alors possible de dater une succession d'évènements et de mesurer le temps écoulé (ou encore la durée) entre deux évènements en le comparant à la période de l'horloge (mesure directe par comparaison).

2 Référentiels

Lorsqu'on cherche à décrire un mouvement, on se heurte à une première difficulté : un insecte, immobile sur le pare-brise d'une voiture en mouvement, apparaîtra au repos pour un observateur dans la voiture et au contraire mobile pour un observateur lié à la terre. De même, le quai est immobile par rapport à la gare mais en mouvement par rapport au train qui démarre. La notion de mouvement n'a donc de sens que si on définit **le référentiel** par rapport auquel on étudie le mouvement. Il conviendra donc de toujours prendre soin de définir le référentiel utilisé lors de la résolution d'un problème de mécanique.

On appelle **référentiel** $\Re$ un solide de référence (réel ou fictif) muni d'une horloge définissant le temps. Le référentiel permet donc de situer un évènement dans l'espace et le temps. Toute étude du mouvement donc **toute étude de cinématique et/ou de dynamique n'a de sens que si le référentiel est précisé !**

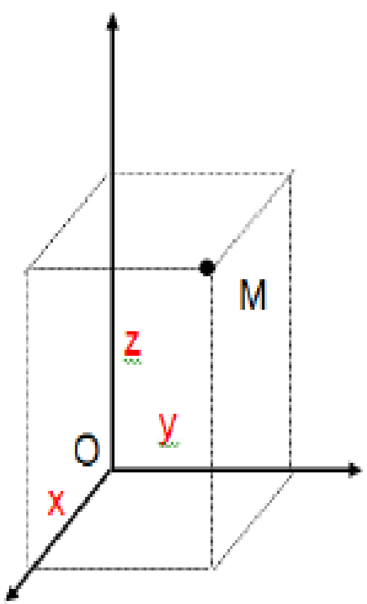
On étudie de nombreux mouvements à notre échelle dans le référentiel dit « **du sol** » (ou « **terrestre** » ou « du laboratoire »).

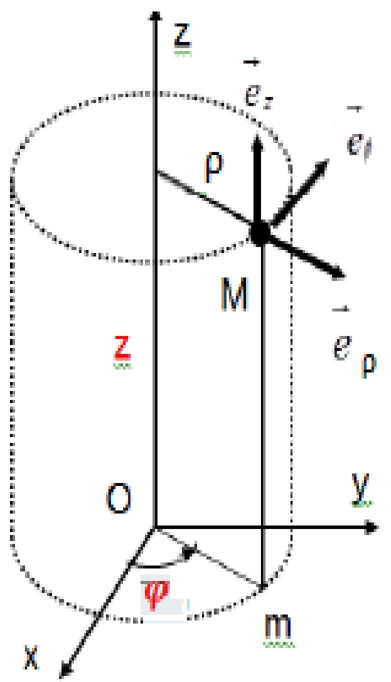
3 Position d'un point matériel

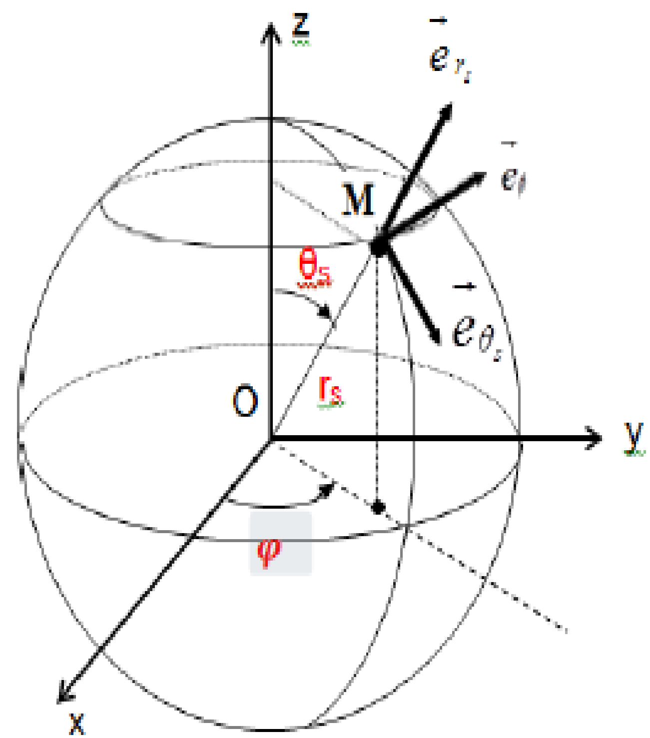
Soit un point matériel P. Connaitre le mouvement de P dans le référentiel $\Re$, c'est connaitre la position de ce point matériel dans $\Re$ à chaque instant. On notera $M(t)$ le point mathématique du référentiel $\Re$ qui coïncide à la date t avec le point matériel P. On dit que $M(t)$ est le point coïncidant avec P à la date t ou simplement que $M(t)$ est la **position** dans $\Re$ du point matériel P en fonction de t.

Repérage de la position de P (rappel)

il existe plusieurs manières de repérer la position $M(t)$ dans $\Re$ du point matériel P







Systèmes de coordonnées classiques

.1 Les coordonnées cartésiennes

Dans l'espace (ou le plan), tout point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes dans un repère *fixe* orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}.$$

De même, tout vecteur $\overrightarrow{V}$ s'écrit dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$:

$$\overrightarrow{V} = V_x\,\overrightarrow{e_x} + V_y\,\overrightarrow{e_y} + V_z\,\overrightarrow{e_z}.$$

Nous allons définir des systèmes de coordonnées *locales*, c'est à dire dépendant du point

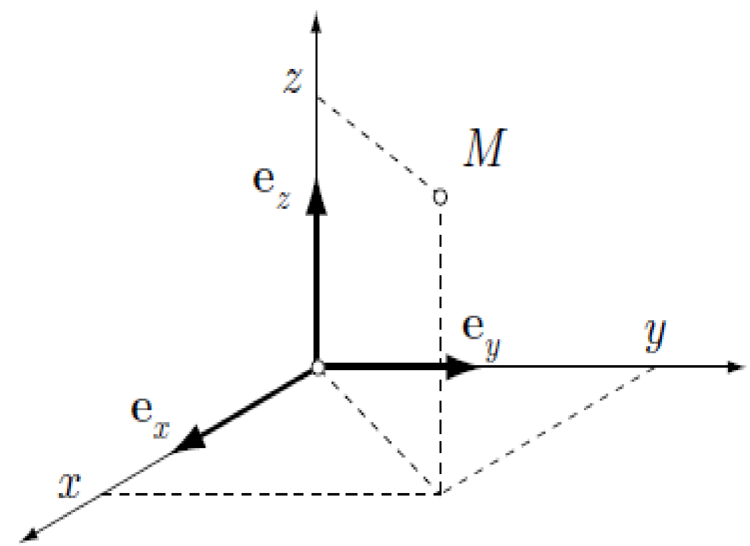


FIG. 5.3 – *Coordonnées cartésiennes*

.2 Coordonnées polaires dans le plan

Si on repère la position de M dans le plan par :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = r \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OM}}) = \theta$$

alors $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et

$$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$$

r et θ sont les *coordonnées polaires* de M. Tout point autre que O est repéré par un couple unique (r, θ) avec

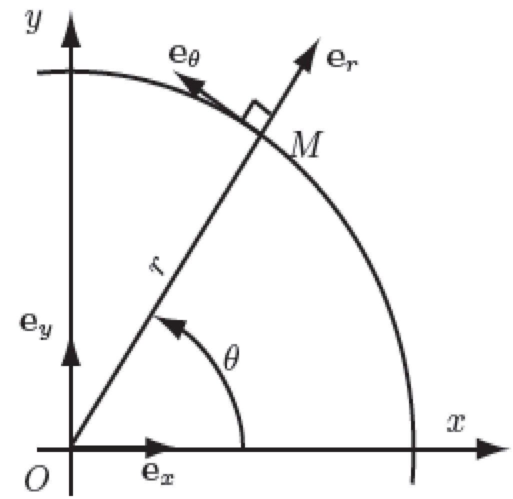
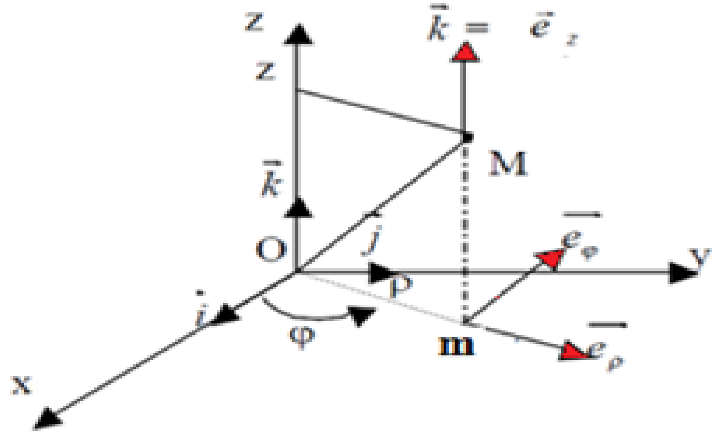


FIG. 5.4 – *Coordonnées polaires*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

- Système de coordonnées Cylindriques



Avec $\begin{cases} \rho : \text{le module de } \overline{om} = |\overline{om}|, \text{ m est la projection de M sur le plan (xoy)}, (\rho > 0) \\ \varphi : \text{angle } (\overline{ox}, \overline{om}) \text{ appelé longitude } (\varphi \in [0, 2\pi]) \\ z : \text{ la côte du point M} \end{cases}$

- Base Cylindrique = $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}$ et $\overrightarrow{e_z})$
- $\overrightarrow{e_\rho}$: vecteur unitaire associé à $\overrightarrow{om}$ / $\overrightarrow{e_\rho} = \dfrac{\overrightarrow{Om}}{\|Om\| = \rho}$
- $\overrightarrow{e_\varphi}$: vecteur unitaire appartenant au plan (xoy), perpendiculaire à $\overrightarrow{e_\rho}$ dans le sens de l'augmentation de l'angle φ.

Le vecteur position de $\overline{M}$ est donnée par $\overline{OM} = \overline{Om} + \overline{mM}$

$$\overrightarrow{OM} = \rho.\overrightarrow{e_\rho} + z.\overrightarrow{e_z}$$

Le sens de $\overrightarrow{e_\rho}$, et $\overrightarrow{e_\varphi}$ dépent de φ donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho.\overrightarrow{e_\rho}(\varphi) + z.\overrightarrow{e_z}}$$

Le module de $\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

Important : La base cylindrique est une base locale

II-2 Déplacement élémentaire :

On a $\overrightarrow{OM} = \rho.\overrightarrow{e_\rho}(\varphi) + z.\overrightarrow{e_z}$ $\qquad \overrightarrow{OM}(\rho,\varphi,z)$

$$\overrightarrow{dOM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}/_{\varphi,z} d\rho + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}/_{\rho,z} d\varphi + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}/_{\rho,\varphi} dz$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}/_{\varphi,z} = \overrightarrow{e_\rho} \ (\overrightarrow{e_\rho}, z \ et \ \overrightarrow{e_z} \ ne \ dépend \ pas \ de \ \rho \\ \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}/_{\rho,z} = \rho \dfrac{\partial \overrightarrow{e_\rho}}{\partial \varphi} \ (\rho, z \ et \ \overrightarrow{e_z} \ ne \ dépend \ pas \ de \ \varphi \\ \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}/_{\rho,\varphi} = \overrightarrow{e_z} = \vec{k} \end{cases}$$

D'autre part d'après la représentation de la base ($\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$ et $\overrightarrow{e_z}$) on a

$\overrightarrow{e_\rho} = (\overrightarrow{e_\rho}.\vec{\imath}).\vec{\imath} + (\overrightarrow{e_\rho}.\vec{\jmath}).\vec{\jmath} \quad \in \text{plan}(xOy)$

$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)\vec{\jmath} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$

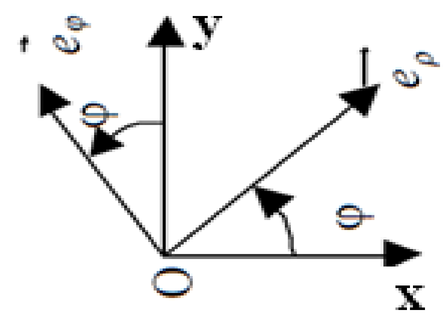
et

$\overrightarrow{e_\varphi} = (\overrightarrow{e_\varphi}.\vec{\imath}).\vec{\imath} + (\overrightarrow{e_\varphi}.\vec{\jmath}).\vec{\jmath} \in \text{plan}(xOy)$

$\overrightarrow{e_\varphi} = \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$

$\frac{\partial \overrightarrow{e_\rho}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} = \overrightarrow{e_\varphi}$



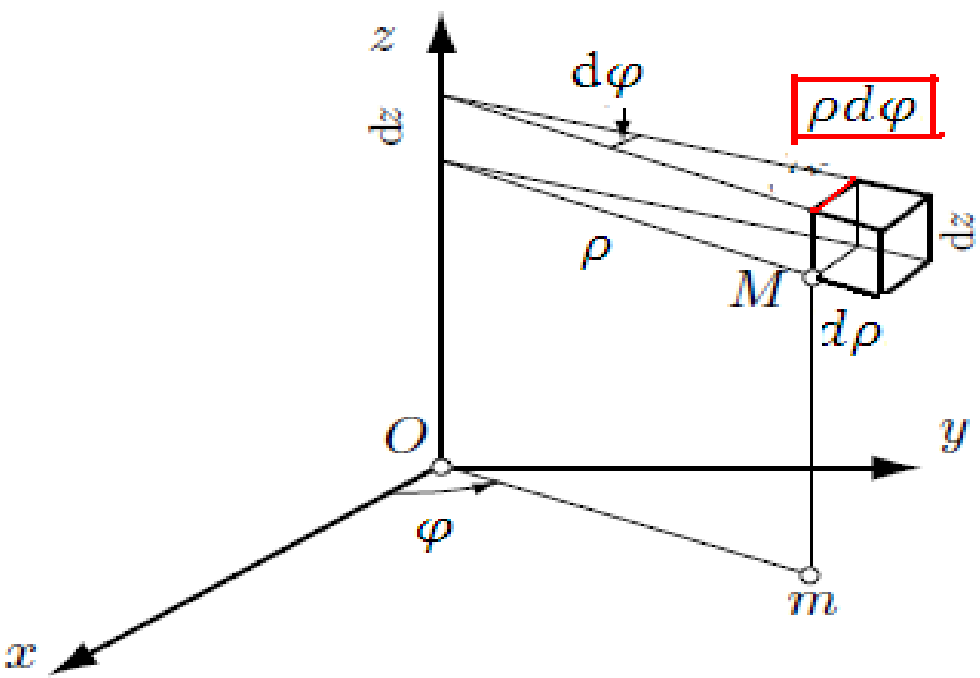
Donc

$$\boxed{\overrightarrow{dOM} = d\rho.\overrightarrow{e_\rho} + \rho.d\varphi.\overrightarrow{e_\varphi} + dz.\overrightarrow{e_z}}$$

■ Un déplacement élémentaire de M engendre un élément de volume dV=$d\rho.\ \rho d\varphi.$ dz

-Si $\rho = cte = R$ le déplacement élémentaire engendre la surface latérale dS= R. $d\varphi$. dz

- si z= Cte (exemple z=0) la surface élémentaire engendrée est donnée par dS= $\rho d\rho$.dφ



Relation entre coordonnées cartésiennes et cylindriques:

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ en coordonnée cartésiennes

$\overrightarrow{OM} = \rho.\overrightarrow{e_\rho} + z.\overrightarrow{e_z}$ en coordonnée cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = \rho(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) + z\overrightarrow{e_z} = \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\varphi\,\vec{j} + z\overrightarrow{e_z} \quad (\overrightarrow{e_z} = \vec{k})$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right] \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = Artg\left(\frac{y}{x}\right)$$

-Systèmes de coordonnées sphériques

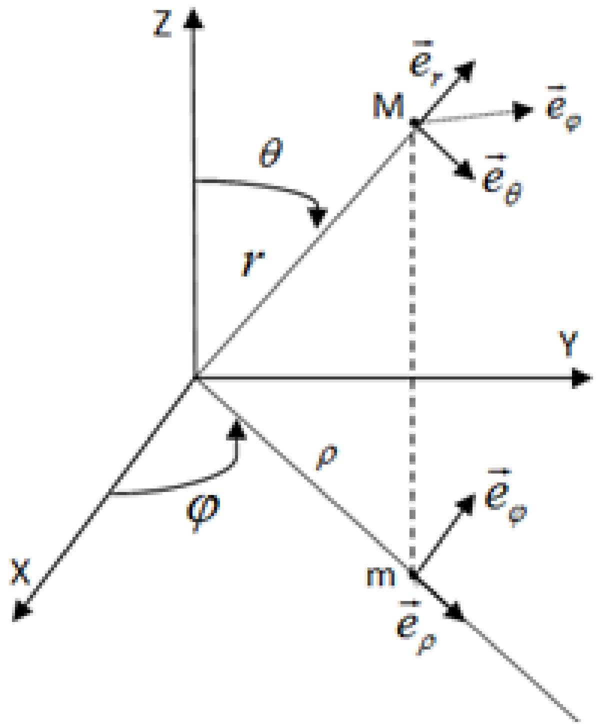
-1 Vecteur position

Lorsque le problème présente une symétrie sphérique autour d'un point O que l'on prend pour origine du repère d'espace, il est pratique d'utiliser les coordonnées sphériques (r,θ,φ) avec :

r= $|\overrightarrow{OM}|$ module du vecteur position

θ = angle $(\vec{k},\overrightarrow{OM})$

φ= angle $(\vec{i},\overrightarrow{Om})$ m : projection de M dans le plan (xOy)



Systèmes de coordonnées sphériques

$(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$: base sphérique , orthonormée , Direct

Avec $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$

$\overrightarrow{e_\theta}$ vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ dans le sens de variation de θ

$\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_r}$ $\in$ au plan $(\vec{k}, \overrightarrow{e_\rho})$

$\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$ vecteur unitaire commun au système de coordonnées cylindriques et sphériques.

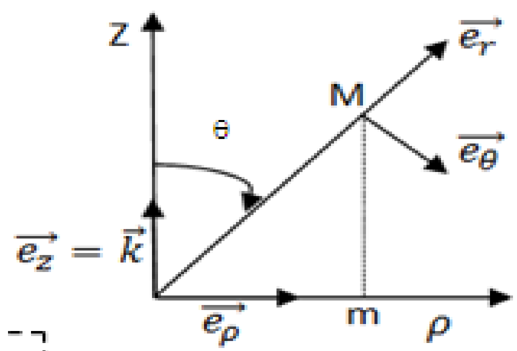
Représentation dans le plan $(\vec{k}, \overrightarrow{e_\rho})$

$r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, \pi[$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

Le vecteur position est donné par

$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$

$\overrightarrow{e_r}$ est fonction de θ et de φ $\rightarrow$ $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_r}(\theta, \varphi)$



$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}(\theta, \varphi)}$$

<u>NB</u> la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ est une base locale.

II-3 Déplacement élémentaire :

$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}(\theta,\varphi)$; $\quad \overrightarrow{dOM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}/_{\theta,\varphi} dr + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}/_{r,\varphi} d\theta + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}/_{r,\theta} d\varphi$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \overrightarrow{e_r}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r\,\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \theta}$$

$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_\rho}$ (Voir figure)

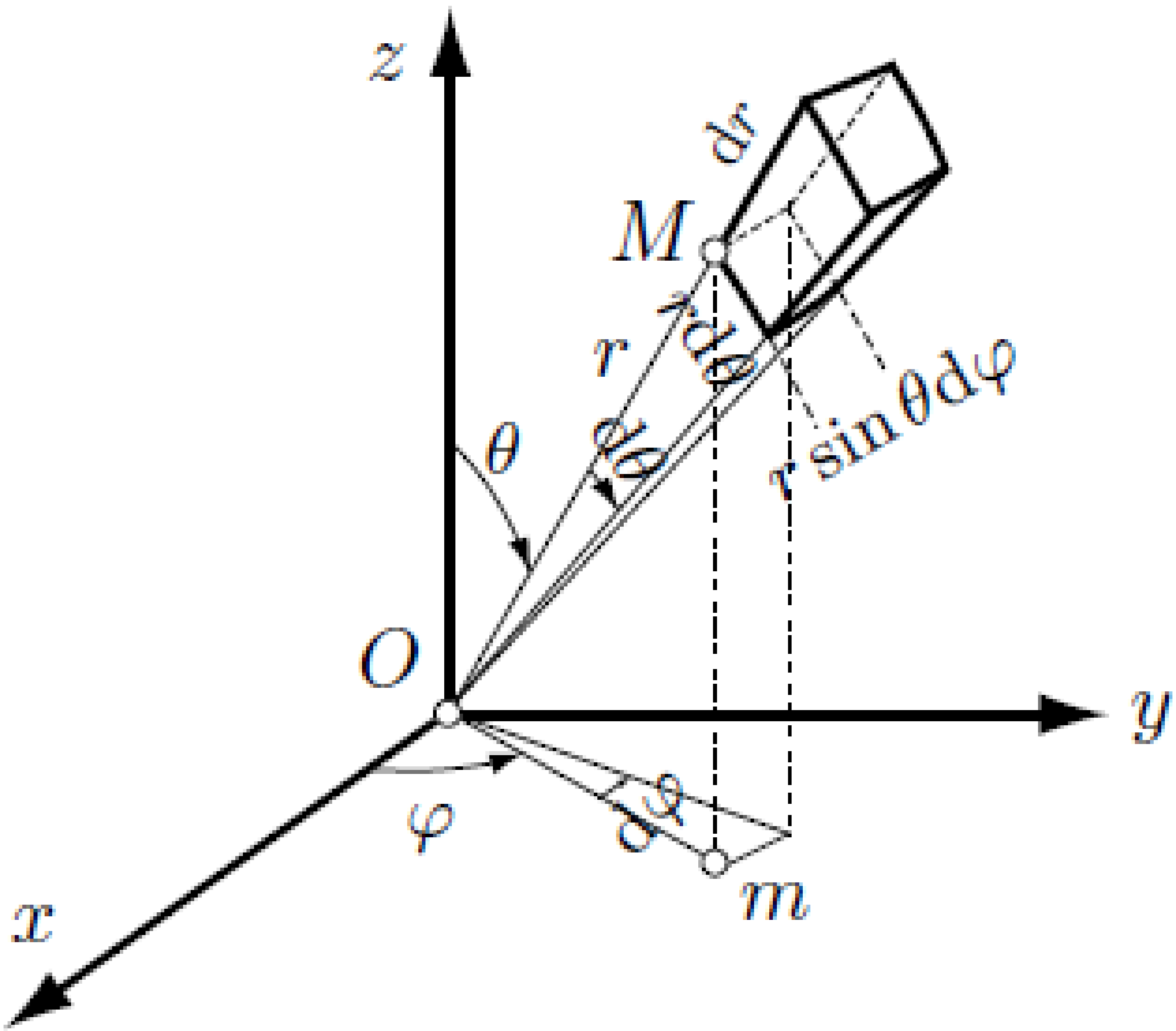
$$\frac{\partial \overrightarrow{er}}{\partial \theta} = -\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_\rho} = \overrightarrow{e_\theta}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = r\,\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \varphi} = r\sin\theta\,\frac{\partial \overrightarrow{e_\rho}}{\partial \varphi} = r\sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

Donc on trouve $\quad d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$

Un déplacement élémentaire en coordonnées sphériques engendre un élément de volume $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$



z
dr
M
r
θ
dθ
r dθ
r sin θ dφ
O
y
φ
dφ
m
x

-4 Relations entre systèmes de coordonnées :

On a en coordonnées sphériques $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$

$$\begin{cases} \rho = r\sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = \mathrm{r}\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \mathrm{Arctg}({}^{\rho}/_{z}) \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$

Passage entre les coordonnées cylindriques et sphériques

$$\overrightarrow{OM} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \mathrm{r}\cos\theta\,\vec{k}$$

Aussi $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_\rho}$ or $\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \mathrm{r}.\cos\theta\,\vec{k}}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = \mathrm{r}\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \mathrm{Arctg}({}^{y}/_{x}) \\ \theta = Arcos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

On a $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, \pi[$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

L'ensemble des points pour lequel r est constant est une sphère

L'ensemble des points pour lequel θ est constant est un cône

L'ensemble des points pour lequel φ est constant est un demi plan