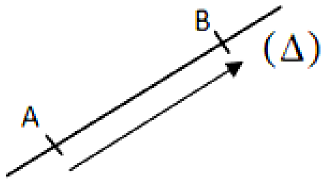
Chapitre I:
Calcul Vectoriel

I- Définition et types de vecteurs

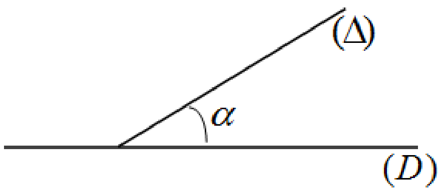
I-1 Définition



Un vecteur $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$ est un segment de droit ayant une origine A, une extrémité B. Il est définie par :

- Le point d'application ou origine A.
- L'extrémité B.
- La direction qui est celle de son support (Δ)
- Le sens de A vers B.
- Le module appelé aussi norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est noté $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, AB ou $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

NB : La direction d'un vecteur est relative, elle est définie par un angle par rapport à un axe donné :



- Si le point d'application coïncide avec l'extrémité, le vecteur est dit vecteur nul A=B, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{O}$. Le vecteur nul n'a ni direction ni sens, sa longueur est nulle.
- On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme égale à l'unité $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1$.
- Un vecteur est constant si sa direction, son sens et sa norme restent constant.

I-2 Exemple de vecteur

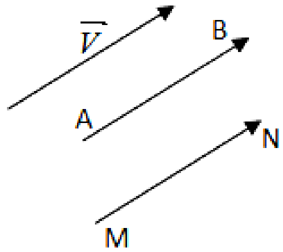
Le déplacement d'un point M vers un point N est caractérisé par une direction (droite passent par M et N), un sens (de M vers N) et un module (longueur MN). Ce déplacement peut être représenté par un vecteur que l'on note $\overrightarrow{MN}$ $(ou\ \vec{U})$.

Les forces, la vitesse, l'accélération sont aussi des vecteurs.

I-3 Types de vecteurs

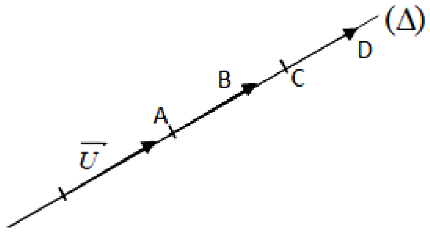
Vecteur libre: Un vecteur est appelé *vecteur libre* s'il est défini par sa direction, son sens et sa longueur. On ne précise ni l'origine ni le support.

Exemple : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$ sont des représentations d'un même vecteur libre $\vec{V}$.



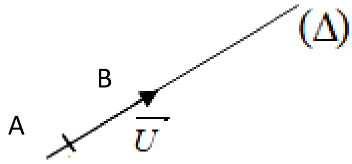
Vecteur glissant: Un vecteur glissant ou (glisseur) est un vecteur défini par son sens, sa norme et son support. On ne précise pas son origine.

Exemple : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sont des représentations du vecteur glissant $\vec{U}$.



Vecteur lié : Un vecteur lié est un vecteur qui possède une origine et une extrémité (A et B sont connus).

Exemple : La position du vecteur est complètement définie sur la droite support (Δ).

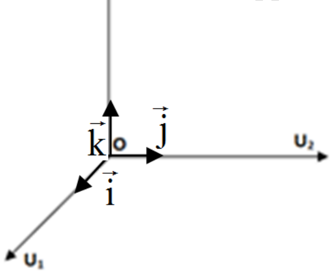


II- Repérage d'un vecteur dans l'espace

II-1- Trièdre et repère

L'espace qui nous entoure est à trois dimensions, pour se repérer dans un tel espace on doit définir un repère à 3 dimensions. Le trièdre ou repère cartésien est un ensemble de 3 axe non coplanaires (n'appartient pas au même plan). On le note $(\overrightarrow{OU_1}, \overrightarrow{OU_2}, \overrightarrow{OU_3})$.

- O est le point d'intersection des 3 axes, il est appelé origine du repère.



$\vec{i}$

Le repère $(\overrightarrow{OU_1}, \overrightarrow{OU_2}, \overrightarrow{OU_3})$ est normé si on définit en chaque axe un vecteur unitaire :

$$\begin{cases} \vec{i} \rightarrow \overrightarrow{OU_1} \\ \vec{j} \rightarrow \overrightarrow{OU_2} \\ \vec{k} \rightarrow \overrightarrow{OU_3} \end{cases} \qquad \text{Avec} \qquad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

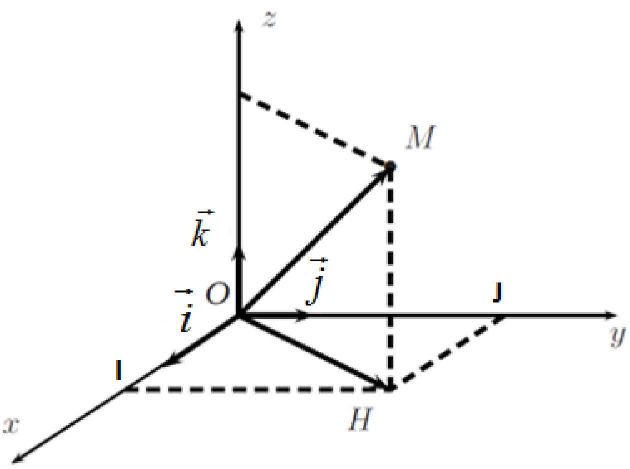
- Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ constituent la base du repère on la note $B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- Le repère orthonormé est note $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

NB : Le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit direct si les vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont dans le sens trigonométrique direct (sens inverse des aiguiller d'une montre). On progressant de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ on s'enfonce vers $\vec{k}$ (*règle du tire-buchant*)

II-2 Repérage d'un point et d'un vecteur

a- Repérage d'un point



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}$

$\overrightarrow{OM}$ s'appel : rayon vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}}$$

x_M, y_M, z_M : Sont les composantes du point M dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

x_M, y_M, z_M : Sont des grandeurs algébrique (peuvent être positives ou négatives)

On définit la norme de $\overrightarrow{OM}$ par : $\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = z_M^2 + (OH)^2 = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}$$

Exercice

Soit M un point de composantes $(4,-2,\sqrt{5})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du repère $R(O,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- ✓ Donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- ✓ Représenté le point M sur un graphe en montrant le repère et la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

b- Repérage d'un vecteur

Soient deux points $M(x_M, y_M, z_M)$ et $N(x_N, y_N, z_N)$

Soit le vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{MN}$, donner l'expression de $\vec{V}$

$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$, $\overrightarrow{ON} = x'_N\vec{i} + y'_N\vec{j} + z'_N\vec{k}$

$$\vec{V} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (x_N - x_M)\vec{i} + (y_N - y_M)\vec{j} + (z_N - z_M)\vec{k}$$

La norme du vecteur $\vec{V}$ est donné par : $\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}$

Exercice

Soient $M(5,-4,0)$ et $N(2,0,-6)$

$\vec{V} = \overrightarrow{MN}$ = ?

$\left\|\vec{V}\right\|$ = ?

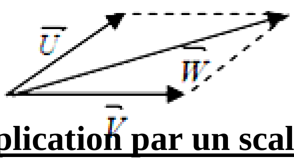
III- Opérations sur les vecteurs libres

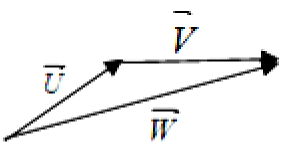
III-1 Addition

Soit $\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{V} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ Soit le vecteur $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$

* Calcul des composantes : $\vec{W} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} + (z + z')\vec{k}$

* Représentation :





III-2 Multiplication par un scalaire

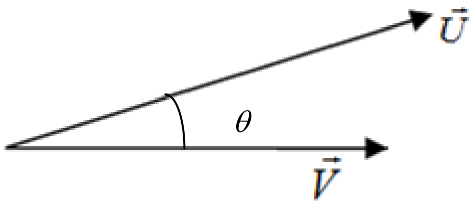
$\lambda.\vec{U} = \lambda.x.\vec{i} + \lambda.y.\vec{j} + \lambda.z.\vec{k}$ = vecteur $\vec{V}$ de composantes $(\lambda.x, \lambda.y, \lambda.z)$.

$\vec{V} = \lambda.\vec{U}$ à la même direction que $\vec{U}$ et son sens dépend de λ

$$\begin{cases} Si \quad \lambda \succ 0 \rightarrow \vec{U} \quad et \quad \vec{V} ont \quad \text{même} \quad sens \\ Si \quad \lambda \prec 0 \rightarrow \vec{U} \quad et \quad \vec{V} ont \quad des \quad sens \quad opposés \end{cases}$$

III-3 Produit scalaire de deux vecteurs

a- Définition : le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, faisant un angle θ entre eux, est la grandeur scalaire donnée par :



$\vec{U}.\vec{V} = |\vec{U}|.|\vec{V}|.\cos(\theta) \qquad 0 \prec \theta \prec \pi$ (angle géométrie)

Soit $\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{V} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

On a en particulier :

$$\vec{i}.\vec{i} = |\vec{i}|.|\vec{i}|.\cos(0) = 1 = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k}$$

$$\vec{i}.\vec{j} = |\vec{i}|.|\vec{j}|.\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{U}.\vec{V} = x.x' + y.y' + z.z'}$$

Le produit scalaire (membre à membre) donne :

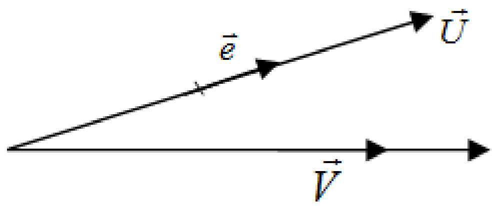
en particulier : $\vec{U}.\vec{U} = x^2 + y^2 + z^2 = U^2 = |\vec{U}|^2$

Important : Le produit scalaire permet de calculer l'angle entre les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{x.x' + y.y' + z.z'}{\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|}} \qquad \rightarrow \theta = ?$$

b- Utilisation du produit scalaire

■ La quantité $\left|\vec{V}\right|.\cos\theta$ représente la projection du vecteur $\vec{V}$ sur le support du vecteur $\vec{U}$.



le vecteur $\vec{e}=\dfrac{\vec{U}}{\left\|\vec{U}\right\|}$ est définis comme le vecteur unitaire associé au vecteur $\vec{U}$ (vérifier que la norme de $\vec{e}$ est égale à l'unité).

On a le produit scalaire $\vec{V}.\vec{e}=\dfrac{\vec{U}.\vec{V}}{\left\|\vec{U}\right\|}=\left\|\vec{V}\right\|.\cos\theta$

la projection de $\vec{V}$ sur le support de $\vec{U}$ n'est autre que le produit scalaire : $\vec{V}\,.\,\vec{e}$

■ Soit un vecteur $\vec{U}$ donné par $\vec{U}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

$\vec{U}.\vec{i}\ =x$ Représente la projection de $\vec{U}$ sur l'axe (OX) de vecteur unitaire $\vec{i}$

- Que représente la quantité $\vec{U}.\vec{j}$, $\vec{U}.\vec{k}$?

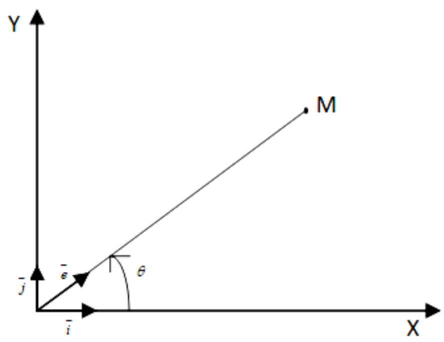
Le vecteur $\vec{U}$ peur s'écrire $\vec{U}=\left(\vec{U}.\vec{i}\right).\vec{i}+\left(\vec{U}.\vec{j}\right).\vec{j}+\left(\vec{U}.\vec{k}\right).\vec{k}$

Exercice

Soit un vecteur $\overrightarrow{OM}$ représenté sur la figure

Donner l'expression de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$

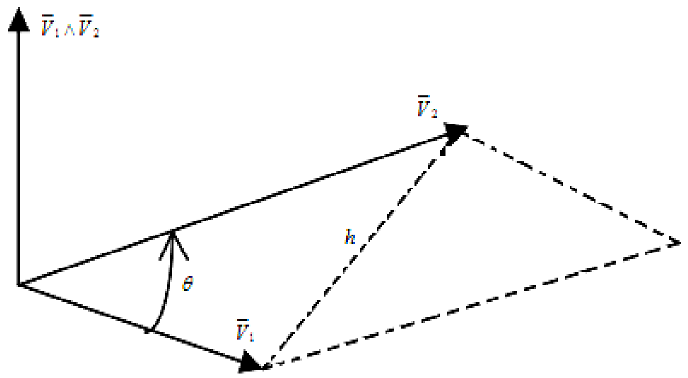
- Exprimer le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$ ($\vec{e}$) en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$
- Exprimer $\vec{e}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ en fonction de θ



III-4 Produit vectoriel

a-Définition : Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, faisant un angle θ entre eux est un vecteur $\vec{w}=\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2$ tél que:

- Direction : $\vec{w}$ est perpendiculaire (normale) au plan formé par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, $\vec{w}$ est donc perpendiculaire à $\vec{V}_1$ et à $\vec{V}_2$; $\vec{w}.\vec{V}_1 = \vec{w}.\vec{V}_2 = 0$
- Sens : appliquer la règle du tire-bouchon : On tourne $\vec{V}_1$ de l'angle le plus petit qui l'amène vers $\vec{V}_2$. Le sens de $\vec{w}$ est celui de l'avancement du tire-bouchon



- Module :

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{V}_1\|.\|\vec{V}_2\|.\sin(\theta) \succ 0$$

La quantité $\|\vec{V}_2\|.\sin\theta = h$ (voir représentation) et $h.\|\vec{V}_1\| =$ surface du parallélogramme formé par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$,

$\|\vec{w}\|$ représente l'aire (surface) du parallélogramme formé par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

<u>b- propriétés du produit vectoriel :</u>

$*\ \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$

$*\ \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 0$ si $\vec{V}_1 = 0$ ou $\vec{V}_2 = 0$, ou $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ *collinaire*, ou $\vec{V}_1$ est parallèle à $\vec{V}_2$.

(Deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont collinaires, s'il existe un entier K tel que $\vec{V}_1 = k.\vec{V}_2$)

* considérant la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée

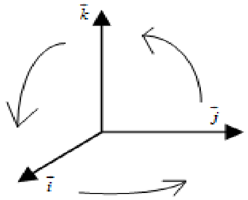
$$\vec{i} \perp \vec{j}\ ,\ \vec{j} \perp \vec{k}\ ,\ \vec{k} \perp \vec{i} \longrightarrow \text{Ortho}$$

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| \longrightarrow \text{Normée}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}\ ,\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}\ ,\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \longrightarrow \text{Base directe}$$

D'après la définition du produit vectoriel, on a $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \end{cases}$$



c- Expression analytique

Considérons deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dont l'expression dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donnée par :

$$\vec{U} = U_1\vec{i} + U_2\vec{j} + U_3\vec{k}$$
$$\vec{V} = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$$

Calculons $\vec{U} \wedge \vec{V}$ terme à terme (faites le calcul):

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = (U_2.V_3 - U_3.V_2)\vec{i} - (U_1.V_3 - U_3.V_1)\vec{j} + (U_1.V_2 - U_2.V_1)\vec{k} = \vec{W}$$

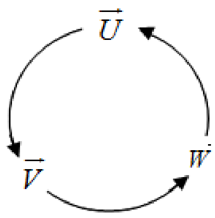
Remarque : $\vec{U} \wedge \vec{V} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$

III-5 Produit mixte de trois vecteurs

❒ Soit trois vecteurs $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$. leur produit mixte est donné par le scalaire $\vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W})$, il est noté $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$.

On peut montrer que $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = (\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}) = (\vec{W}, \vec{U}, \vec{V})$

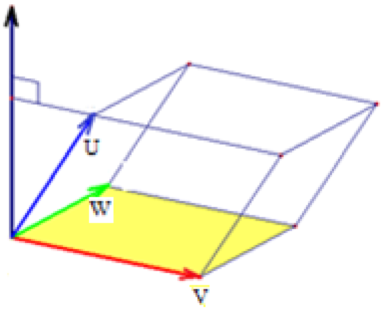
☐ Le produit mixte ne change pas de valeurs après une permutation circulaire des trois vecteurs.



❒ après décomposition de $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

on a $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \det \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix}$

❒ Montrer que le produit mixte $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$ est égal au volume du parallélépipède construit à partir des 3 longueurs des vecteurs $\vec{U}$,$\vec{V}$ et $\vec{W}$



III-6 Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel des vecteurs $\vec{U}$,$\vec{V}$ et $\vec{W}$ est donné par $\vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W})$

- Montrer que $\vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W})=\vec{V}.(\vec{U}.\vec{W})-(\vec{U}.\vec{V}).\vec{W}$

  1 2 3 1 3 2 1 2 3

Exercice : Soit $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ deux vecteurs avec $|V_1|=4$, $|V_2|=5$ et θ angle entre $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ $\theta=30°$

- Calculer l'aire du parallélogramme constitué sur $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$.