La représentation des nombres réels

- Un nombre réel est constitué de deux parties : la partie entière et la partie fractionnelle (les deux parties sont séparées par une virgule)
- Problème : comment indiquer à la machine la position de la virgule ?
- Il existe deux méthodes pour représenter les nombre réel :
  - Virgule fixe : la position de la virgule est fixe
  - Virgule flottante : la position de la virgule change (dynamique)

Représentation en virgule flottante

- Chaque nombre réel peut s'écrire de la façon suivante :

$$N = \pm M * b^{e}$$

  - M : mantisse ,
  - b : la base ,
  - e : l'exposant

- **Exemple :**

$15{,}6 = 0{,}156 * 10^{+2}$

$-(110{,}101)_2 = -(0{,}110101)_2 * 2^{+3}$

$(0{,}00101)_2 = (0{,}101)_2 * 2^{-2}$

Remarque :

on dit que la mantisse est normalisée si le premier chiffre après la virgule est différent de 0 et le premier chiffre avant la virgule est égale à 0.

La virgule fixe

- Dans cette représentation la partie entière est représentée sur n bits et la partie fractionnelle sur p bits , en plus un bit est utilisé pour le signe.
- Exemple : si n=3 et p=2 on va avoir les valeurs suivantes

Signe	P.E	P.F	valeur
0	000	00	+ 0,0
0	000	01	+ 0,25
0	000	10	+ 0,5
0	000	11	+ 0,75
0	001	.00	+ 1,0
.	.	.	.
.	.	.	.

Dans cette représentation les valeurs sont limitées et nous n'avons pas une grande précision

- Dans cette représentation sur n bits :
  - La mantisse est sous la forme signe/valeur absolue
    - 1 bit pour le signe
    - et k bits pour la valeur.
  - L'exposant (positif ou négatif) est représenté sur p bits .

Signe mantisse	Exposant	Mantisse normalisée
1 bit	p bits	k bits

•Pour la représentation de l'exposant on utilise :

- Le complément à deux
- Exposant décalé ou biaisé

Représentation de l'exposant en complément à deux

- On veut représenter les nombres $(0{,}015)_8$ et $-(15{,}01)_8$ en virgule flottante sur une machine ayant le format suivant :

Signe mantisse	Exposant en CA2	Mantisse normalisée
1 bit	4 bits	8 bits

$(0{,}015)_8 = (0{,}000001101)_2 = 0{,}1101 * 2^{-5}$
Signe mantisse : positif (0)
Mantisse normalisé : 0,1101
Exposant = -5 → utiliser le complément à deux pour représenter le -5
Sur 4 bits CA2(0101)=1011

0	1 0 1 1	1 1 0 1 0 0 0 0
1 bit	4 bits	8 bits

L' Exposant décalé (biaisé)

- en complément à 2, l'intervalle des valeurs qu'on peut représenter sur p bits :

$$-2^{(p-1)} \leq N \leq 2^{(p-1)} - 1$$

Si on rajoute la valeur $2^{(p-1)}$ à tout les terme de cette inégalité :

$$-2^{(p-1)} + 2^{(p-1)} \leq N + 2^{(p-1)} \leq 2^{(p-1)} - 1 + 2^{(p-1)}$$

$$0 \leq N + 2^{(p-1)} \leq 2^{p} - 1$$

- On pose $N' = N + 2^{(p-1)}$ donc : $0 \leq N' \leq 2^{p} - 1$

- Dans ce cas on obtient des valeur positives.
- La valeur 2^{p-1} s'appelle le biais ou le décalage

$-(15{,}01)_8 = -(001101{,}000001)_2 = -\ 0{,}1101000001 * 2^{4}$

Signe mantisse : négatif (1)
Mantisse normalisée : 0,1101000001
Exposant = 4 , en complément à deux il garde la même valeur (0100)

On remarque que la mantisse est sur 10 bits (1101 0000 **01**), et sur la machine seulement 8 bits sont utilisés pour la mantisse.
Dans ce cas on va prendre les 8 premiers bits de la mantisse

1	0 1 0 0	1 1 0 1 0 0 0 0
1 bit	4 bits	8 bits

Remarque :
si la mantisse est sur k bits et si elle est représenté sur la machine sur k' bits tel que k> k' , alors la mantisse sera tronquée : on va prendre uniquement k' bits → perdre dans la précision .

- Avec l'exposant biaisé on a transformé les exposants négatifs à des exposants positifs en rajoutons à l'exposant la valeur 2^{p-1}.

Exposant Biaisé = Exposant réel + Biais

Exemple

- On veut représenter les nombres $(0,015)_8$ et $-(15,01)_8$ en virgule flottante sur une machine ayant le format suivant :

Signe mantisse	Exposant décalé	Mantisse normalisée

1 bit 4 bits 11 bits

$$(0,015)_8=(0,000001101)_2= 0,1101 * 2^{-5}$$

Signe mantisse : positif (0)
Mantisse normalisé : 0,1101
Exposant réel = -5
Calculer le biais : b= 2^{4-1} = 8
Exposant Biaisé = -5 + 8 = +3 = $(0011)_2$

0	0011	1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0

1 bit 4 bits 11 bits

$$-(15,01)_8=(001101,000001)_2= 0,1101000001 * 2^{4}$$

Signe mantisse : négatif (1)
Mantisse normalisée : 0,1101000001
Exposant réel = + 4
Calculer le biais : b= 2^{4-1} = 8
Exposant Biaisé = 4 + 8 = +12 = $(1100)_2$

1	1100	1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0

1 bit 4 bits 11 bits

Opérations arithmétiques en virgule flottante

- Soit deux nombres réels N1 et N2 tel que
  $N1=M1*b^{e1}$ et $N2=M2*b^{e2}$
- On veut calculer N1+N2 ?
- Deux cas se présentent :
  - Si e1 = e2 alors N3= (M1+M2) b^{e1}
  - Si e1 <> e2 alors élevé au plus grand exposant et faire l'addition des mantisses et par la suite normalisée la mantisse du résultat.

Exemple

- Effectuer l'opération suivante : $(0,15)_8+(1,5)_8=(?)$:

$(0,15)_8$= (0,001101) = 0,1101 $*2^{-2}$
$(1,5)_8$= (001, 1 01) = 0,1101 $*2^{1}$
$(0,15)_8+(1,5)_8$ = 0,1101 $*2^{-2}$ + 0,1101 $*2^{1}$
= 0,0001101 $*2^{1}$ + 0,1101 $*2^{1}$
= 0, 1110101 $* 2^{1}$

0	0001	111010

1 bit 4 bits 6 bits

Exercice

Donner la représentation des deux nombres **N1= $(-0,014)_8$ et N2=$(0,14)_8$** sur la machine suivante :

Signe mantisse	Exposant biaisé (décalé)	Mantisse normalisée

1 bit **5 bits** **10 bits**

- Calculer **N2-N1** ?.

Avant de représenter les deux nombres on doit calculer le biais (décalage)

$B = 2^{5-1} = 2^4 = 16$

$N1 = (-0,014)_8 = (-0,000001100)_2 = (-0,1100)_2 \cdot 2^{-5}$

$ExpB = -5 + 16 = 11 = (01011)_2$

$N2 = (0,14)_8 = (0,001100)_2 = (0,1100)_2 \cdot 2^{-2}$

$ExpB = -2 + 16 = 14 = (01110)_2$

Donc on va avoir la représentation suivante pour N1 et N2:

N1	1	01011	1100000000	**1 010 1111 0000 0000 $(AF00)_{16}$**
N2	0	01110	1100000000	**0011 10 11 0000 0000 $(3B00)_{16}$**

$N2 - N1 = 0,14 - (-0,014) = 0,14 + 0,014$

$N2 - N1 = (0,1100)_2 \cdot 2^{-2} + (0,1100)_2 \cdot 2^{-5}$

$= (0,1100)_2 \cdot 2^{-2} + (0,0001100)_2 \cdot 2^{-2}$

$= (0,1101100)_2 \cdot 2^{-2}$

•Si on fait les calculs avec l'exposant biaisé :

$N2 - N1 = (0,1100)_2 \cdot 2^{14} + (0,1100)_2 \cdot 2^{11}$

$= (0,1100)_2 \cdot 2^{14} + (0,0001100)_2 \cdot 2^{14}$

$= (0,1101100)_2 \cdot 2^{14}$

Exposant biaisé = 14

Exposant réel = Exposant biaisé – Biais

Exposant réel = 14 – 16 = -2

Donc on trouve le même résultat que la première opération.

Le codage BCD (Binary Coded Decimal)

- Pour passer du décimal au binaire , il faut effectuer des divisions successives. Il existe une autre méthode simplifiée pour le passage du décimal au binaire.
- Le principe consiste à faire des éclatement sur 4 bits et de remplacer chaque chiffre décimal par sa valeur binaire correspondante .
- Les combinaisons supérieures à 9 sont interdites

Décimal	Binaire
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Exemple

1 2 9

0001 0010 1001

5 6 2

0101 0110 0010

$129 = (0001\ 0010\ 1001)_2$

$562 = (0101\ 0110\ 0010)_2$

Codage des caractères

- Les caractères englobent : les lettres alphabétiques (A, a, B , B,..) , les chiffres , et les autres symboles (> , ; / : ….) .
- Le codage le plus utilisé est le ASCII (American Standard Code for Information Interchange)
- Dans ce codage chaque caractère est représenté sur 8 bits .
- Avec 8 bits on peut avoir $2^8 = 256$ combinaisons
- Chaque combinaison représente un caractère
  - Exemple :
    - Le code 65 $(01000001)_2$correspond au caractère **A**
    - Le code 97 (01100001) correspond au caractère **a**
    - Le code 58 (00111010)correspond au caractère **:**
- Actuellement il existe un autre code sur 16 bits , se code s'appel **UNICODE** .

Le codage EXCESS3 (BCD+3)

Décimal	BCD+3	Binaire
0	3	0011
1	4	0100
2	5	0101
3	6	0110
4	7	0111
5	8	1000
6	9	1001
7	10	1010
8	11	1011
9	12	1100

1 2 9

0100 0101 1100

Fin de la cinquième séance