Codage de l'information

1. Système de numération
2. Représentation de l'information dans la machine

I. Systèmes de numération

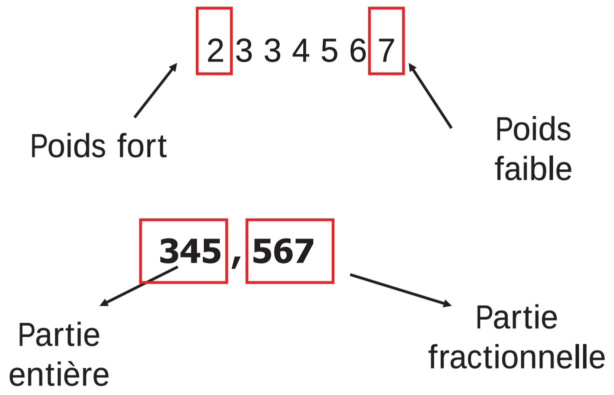
1. Introduction
2. Système décimal
3. Système binaire , octal et hexadécimal
4. Conversion d'un système de numération vers un autre système .
5. Opérations arithmétiques en binaire, octal et hexadécimal.

Introduction

- Nous avons pris l'habitude de représenter les nombres en utilisant dix symboles différents: 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9
- Ce système est appelé le système décimal (déci signifie dix).
- Il existe cependant d'autres formes de numération qui fonctionnent en utilisant un nombre de symboles distincts.
  - Exemple :
    - système binaire (bi: deux),
    - le système octal (oct: huit),
    - le système hexadécimal (hexa: seize).
- En fait, on peut utiliser n'importe quel nombre de symboles différents (pas nécessairement des chiffres).
- Dans un système de numération : le nombre de symboles distincts est appelé la base du système de numération.

I . Le système décimal

- On utilise dix symboles différents:
  { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }
- N'importe quelle combinaison des symboles **{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }** nous donne un nombre.



Développement en polynôme d'un nombre dans le système décimal

Soit le nombre 1978, ce nombre peut être écrit sous la forme suivante :

$$2017 = 2000 + 000 + 10 + 7$$
$$2017 = 2*1000 + 0*100 + 1*10 + 7*1$$
$$2017 = 2*10^3 + 0*10^2 + 1*10^1 + 7*10^0$$

Cette écriture s'appelle la forme polynomiale

Un nombre réel peut être écrit aussi sous la forme polynomiale

$$2017{,}265 = 2*10^3 + 0*10^2 + 1*10^1 + 7*10^0 + 2*10^{-1} + 6*10^{-2} + 5*10^{-3}$$

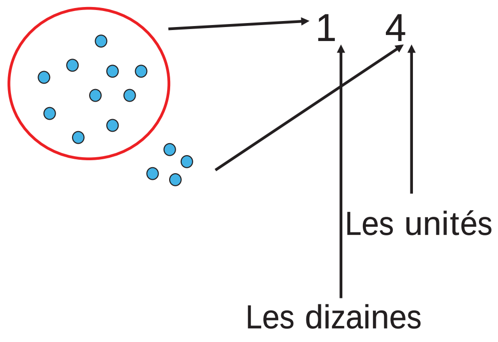
Comptage en décimal

- Sur une seule position : 0 ,1,2,3,4,5,….9= 10^1-1
- Sur deux positions : 00 , 01,02, …..,99=10^2-1
- Sur trois positions 000,001,……,999=10^3-1

- Sur n positions : minimum 0
  maximum 10^n-1
  nombre de combinaisons 10^n

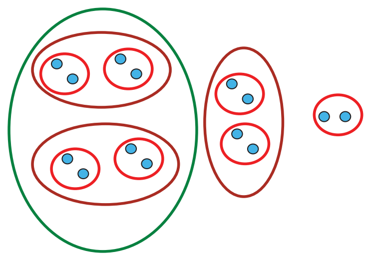
Système binaire (système à base 2)

Supposons qu'on a 14 jetons , si on forme des groupes de 10 jetons. On va obtenir 1 seul groupe et il reste 4 jetons.



- ➢ Maintenant on va former des groupes de 2 jetons (on obtient 7 groupes)
- ➢ Par la suite on va regrouper les 7 groupes 2 à 2 (on obtient 3 groupes).
- ➢ On va regrouper ces derniers aussi 2 à 2 (on obtient 1 seul groupe)

Le schéma illustre le principe :



Nombre de jetons qui restent en dehors des groupes : 0
Nombre de groupes qui contiennent 2 jetons : 1
Nombre de groupes qui contiennent 2 groupes de 2 jetons : 1
Nombre de groupes qui contiennent des groupes de 2 groupes de 4 jetons : 1

Si on regroupe les différents chiffres on obtient : 1110

1110 est la représentation de 14 dans la base 2

- Dans le système binaire, pour exprimer n'importe quelle valeur on utilise uniquement 2 symboles : { 0 , 1}

Un bit $(\boxed{1}101)_2$ La base

$(\boxed{1}\ 1\ 0\ \boxed{1})_2$

Le bits du poids forts

Le bits du poids faible

Un nombre dans la base 2 peut être écrit aussi sous la forme polynomial

$$(1110)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 = (14)_{10}$$

$$(1110{,}101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = (14{,}625)_{10}$$

Comptage en binaire

Sur un seul bit : 0 , 1

Sur 2 bits

Binaire	Décimal
00	0
01	1
10	2
11	3

4 combinaisons= 2^2

Sur 3 Bits

Binaire	Décimal
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

8 combinaisons= 2^3

Le système octal (base 8)

8 symboles sont utilisés dans ce système:
{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 }

Exemple 1 :

$$(127)_8 = 1*8^2 + 2*8^1 + 7*8^0$$

$$(127{,}65)_8 = 1*8^2 + 2*8^1 + 7*8^0 + 6*8^{-1} + 5*8^{-2}$$

Exemple 2 :

Le nombre (1289) n'existe pas dans la base 8 puisque les symboles 8 et 9 n'appartiennent pas à la base .

Le système hexadécimal (base 16)

On utilise seize (16) symboles différents:

Décimal	Hexadécimal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

$$(17)_{16} = 1*16^1 + 7*16^0$$

$$(AB)_{16} = A*16^1 + B*16^0 = 10*16^1 + 11*1$$

Résumé

- Dans une base X , on utilise X symboles distincts pour représenter les nombres.
- La valeur de chaque symbole doit être strictement inférieur à la base X.
- Chaque nombre dans une base X peut être écrit sous sa forme polynomiale .

Conversion d'une base X à la base 10

Cette conversion est assez simple puisque il suffit de faire le développement en polynôme de ce nombre dans la base X , et de faire la somme par la suite.

Exemple :

$$(1101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = (13)_{10}$$

$$(1A7)_{16} = 1*16^2 + A*16^1 + 7*16^0 = 1*16^2 + 10*16^1 + 7*16^0 = 256 + 160 + 7 = (423)_{10}$$

$$(1101{,}101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = (13{,}625)_{10}$$

$$(43{,}2)_5 = 4*5^1 + 3*5^0 + 2*5^{-1} = 20 + 3 + 0{,}4 = (23{,}4)_{10}$$

Exercice

Effectuer les transformations suivantes à la base 10 ?

$(123)_6 = (?)_{10}$

$(45{,}76)_8 = (?)_{10}$

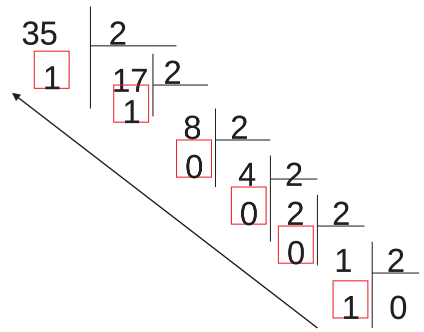
$(1100{,}11)_2 = (?)_{10}$

$(1ABC)_{16} = (?)_{10}$

Conversion de la base 10 à la base 2

Le principe consiste à faire des divisions successives du nombre sur 2 , et prendre le reste des divisions dans l'ordre inverse.

Exemple 1 :
$(35)_{10}=(?)_2$



Après division :

on obtient : $(35)_{10}=(100011)_2$

Conversion de la base 10 à la base 2 : cas d'un nombre réel

- Un nombre réel est constitué de deux parties : la partie entière et la partie fractionnelle.
- La partie entière est transformée en effectuant des divisions successives.
- La partie fractionnelle est transformée en effectuant des multiplications successives par 2 .

Exemple : $35{,}625=(?)_2$

P.E= $35 = (100011)_2$

$0{,}625 * 2 = \boxed{1},25$
$0{,}25 * 2 = \boxed{0},5$
$0{,}5 * 2 = \boxed{1},0$

PF= $0{,}625 = (?)_2$

$(0{,}625)=(0{,}101)_2$

Donc $35{,}625=(100011{,}101)_2$

- **Exemple 2:** $(0{,}6)_{10}=(?)_2$

$0{,}6 * 2 = 1{,}2$
$0{,}2 * 2 = 0{,}4$
$0{,}4 * 2 = 0{,}8$
$0{,}8 * 2 = 1{,}6$

$\longrightarrow (0{,}6)= (0{,}1001)_2$

Remarque :

Le nombre de bits après la virgule va déterminer la précision .

Exercice :

Effectuer les transformations suivantes :

$(23{,}65)=(?)_2$

$(18{,}190)=(?)_2$

Fin de la deuxième séance