Université Mohammed V de Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4x-9}-x$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\Big(1+2+\ldots+\Big[\dfrac{1}{|x|}\Big]\Big)$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x^3+6x+1}{9}$ et on définit la suite récurrente $(u_n)_n$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$.

1- Montrer que la fonction $g(x) = x^3 - 3x + 1$ est strictement décroissante sur l'intervalle $\big[0, \frac{1}{2}\big]$. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $\big[0, \frac{1}{2}\big]$.

2- Déduire que x_0 est le seul point dans $\big[0, \frac{1}{2}\big]$ tel que $f(x) = x$ et que $\forall x \in [0, x_0]$, $f(x) \geq x$.

3- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq x_0$.

4- Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$. Est-elle convergente ? Si oui déterminer sa limite.

Exercice 3. Montrer que si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est continue, alors il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 4 (CF 2017)**.** Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x^2}$. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a- Montrer que f est une bijection de $[0,1]$ vers $[0,1]$.

b- Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.

c- Est-ce que la suite $(u_n)_n$ converge ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > f(x)$. Montrer que $\forall x > x_0, f(x) > 0$.

Aide : Utiliser le fait que la fonction $g(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$ est croissante.

Déduire que, $\forall a > 0$, l'équation $a\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ n'admet qu'une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = a + \dfrac{x}{2(1+x^2)}$ et $\varphi(x) = x - f(x)$.

1- Montrer que f est dérivable et que $f'(x) \leq 1/2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2- Montrer que φ est strictement croissante et calculer ses limites en $\pm\infty$.

3- En déduire qu'il existe un réel unique noté x_a tel que $f(x_a) = x_a$

4- Déterminer le signe de $\varphi(a)$. En déduire que $a < x_a$.

Exercice 7. Considérons la fonction $f : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $x_n = n + \dfrac{1}{n}$ et $y_n = n$. Pour $n > 2$, calculer $|f(x_n) - f(y_n)|$. En déduire que f n'est pas uniformément continue.

Exercice 8. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels dans $]a, b[$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que : $f(x_0) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}$.
Aide : considérer $m = \min\limits_i f(x_i)$ et $M = \max\limits_i f(x_i)$.

Exercice 9. Soit la fonction f définie par $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$. On suppose que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq |\sin x|$. Montrer que $|a_1 + 2a_2 + \ldots na_n| \leq 1$.

Exercice 10. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$ et telle que pour tout $x \in]a, b[$ on a $f'(x) \neq 1$. Montrer que f admet un, et un seul, point fixe (i.e. $f(x_0) = x_0$).

Exercice 11. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur$]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Prouver qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

Indication : Considérer la fonction $h(x) = f(x)\, \mathrm{e}^{g(x)}$.

Exercice 12. Soit f une fonction continue sur $[0, 2]$, deux fois dérivable sur $]0, 2[$. Montrer que si $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$, il existe alors $x_0 \in]0, 2[$ tel que $f''(x_0) = 0$.

Exercice 13. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a, b[$ telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant $|f''(x)| < M$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer que f est uniformément continue sur $]a, b[$.

Exercice 14 (CF 2017)**.** Soient c et d deux réels tels que $c < d$ et soit g une fonction deux fois dérivable sur $[c, d]$. On suppose que $g(c) = g(d) = 0$ et que pour tout $x \in]c, d[$, $g''(x) \leq 0$.

1) Montrer qu'il existe $x_0 \in [c, d]$ tel que $g'(x_0) = 0$.
2) Montrer que pour tout $x \in]c, d[$, $g(x) \geq 0$.

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 16. Soit fonction définie par $g(x) = x^2 \cos(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier la continuité de g'.

Exercice 17. [CF 2019] Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 3x\, \mathrm{E}\Big(\dfrac{1}{x}\Big) & \text{si } x < 0, \end{cases}$

où $\mathrm{E}(a)$ est la partie entière de a.

Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.