Exercice 1. Étudier la convergence de la suite de terme général donné par :

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Exercice 2. (Calcul approché de $\sqrt{a}$) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$, on considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$, et on note $(v_n)_n$ la suite de terme général $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.

a- Montrer que, pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n^2$.

b- Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_n$. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.

c- Déduire que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

d- Calculer les trois premiers termes de la suite $(u_n)_n$, pour $u_0 = 1$ et $a = 2$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$.

1- Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.

2- Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{2^n}$.

3- Déduire que $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite.

Exercice 4. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par la relation : $u_1 = 1$, et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{2+u_n}{1+u_n}$.

1- Montrer que pour tout $n \geq 2$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4}|u_n - u_{n-1}|$.

2- En déduire que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy et trouver sa limite.

Exercice 5. Étant donné $a > 0$, on définit la suite $(u_n)_n$ par :

$$u_0 = 0, \text{ et pour } n \geq 1,\ u_n = \frac{a}{2 + u_{n-1}}.$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{e^n}{2^{2n+1}}$.

1- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite géométrique et déterminer sa raison r.

2- Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 7. Soient $(u_n)_n$ une suite réelle et $(v_n)_n$ la suite dont le terme général est défini par :

$$v_0 = 0, \text{ et } \forall n \geq 1,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1- En utilisant la définition de la convergence, montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell$.

2- Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n} = \ell$.

3- Supposons que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Exercice 8. Pour chacune des des suites suivantes étudier le sens de variation (croissance, décroissance ou monotonie) et la convergence.

$$(a)\;\; u_0 = \frac{1}{2},\; u_{n+1} = \sqrt{u_n}; \quad (b)\;\; v_0 = 2,\; v_{n+1} = \sqrt{v_n}; \quad (c)\;\; w_0 = 1,\; w_{n+1} = \frac{w_n}{w_n^2 + 1}.$$

Exercice 9. Soit $(a_n)_n$ la suite définie par $a_0 \in]1, 2[$ et $a_{n+1} = \dfrac{4a_n + 2}{a_n + 3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1- Montrer que $(a_n)_n$ est une suite croissante majorée.

2- En déduire que $(a_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 10. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 > 0,\; u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\; u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n\, u_{n-1}}.$$

Exercice 11. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par :$u_0 = a \geq 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1}$, $\forall n \geq 0$.

1- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$.

2- Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n + \dfrac{1}{2}$ puis que $u_n \geq u_0 + \dfrac{n}{2}$. En déduire la limite de $(u_n)_n$.

Exercice 12. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les deux suites définies par :

$$u_0 = v_0 = 0 \text{ et pour } n \geq 1,\; u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k + n^2}.$$

1- Calculer u_n et déterminer sa limite.

2- On pose $w_n = u_n - v_n$. Montrer que $(w_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

3- En déduire que $(v_n)_n$ converge et donner sa limite.

Exercice 13. On considère les suites réelles à termes positifs $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$u_0 = a > 0,\; v_0 = b > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$ On suppose que $a < b$.

1- Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.

2- Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ.