Université Mohammed V de Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

SMIA-S1 | Automne 2017
Analyse1 | Contrôle de Rattr
Le 25 janvier 2017 | Durée :**1H30**

Les exercices sont indépendants. Justifiez toutes vos réponses.
La qualité de présentation et de rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Soient f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, D_f son domaine de définition et A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par : $A = \left\{x \in D_f : f(x) < \dfrac{1}{x}\right\}$.

1- Déterminer D_f.

2- Montrer que A admet une borne supérieure (on ne cherchera pas à la déterminer).

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < \dfrac{1}{x}$.

4- Montrer que A n'admet pas de plus grand élément.

Exercice 2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = x_0$.

b) Montrer qu'il existe une constante $\alpha \in]0,1[$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|g(x) - g(y)| \leq \alpha |x - y|$

On considère la suite $(x_n)_n$ définie par $x_1 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

c) Montrer que $\forall n \geq 1$, $|x_{n+1} - x_0| \leq \alpha |x_n - x_0|$.

d) En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Exercice 3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$h(x) = \begin{cases} x\ln(x) - x & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1) Montrer qu'on peut prolonger h par continuité en 0. On notera $\tilde{h}$ ce prolongement de h.

2) Montrer que $\tilde{h}$ n'est pas dérivable en 0.

Bonne Chance

Analyse 1 **Corrigé du CR** **Automne 17**

Exercice 1 On a $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1- La fonction f est bien définie si et seulement si, $x(1-x) > 0$. D'où $D_f =]0, 1[$.

2- On a $f(1/4) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} < 4 = \dfrac{1}{1/4}$. Donc $A \neq \emptyset$. De plus $A \subset D_f$ est majorée par 1. En tant que partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, A admet donc une borne supérieure.

3- $\begin{cases} x \in]0,1[\\ \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} < \frac{1}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in]0,1[\\ x^2 < x(1-x) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in]0,1[\\ x(2x-1) < 0 \end{cases} \iff x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[.$

4- D'après la question précédente, on a $A = \left]0, \frac{1}{2}\right[$, donc $\sup A = \frac{1}{2}$. Comme $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, on a $\frac{1}{2} \notin A$. Donc A n'a pas de plus grand élément.

Exercice 2

a) On considère la fonction $h : x \mapsto g(x) - x$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et on a $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \infty$ et $\lim_{x \to \infty} h(x) = -\infty$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $h(x_0) = 0$, c'est-à-dire $g(x_0) = x_0$.

b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, en particulier, dérivable sur tout intervalle d'extrémités x et y. Donc $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, on a par le théorème des accroissements finis, il existe c compris entre x et y tel que : $g(x) - g(y) = (x-y) \times g'(c)$. La fonction $x \mapsto g'(x)$ est bornée. En effet, $g''(x) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}(2\mathrm{x}^2 - 1)$, d'où le tableau de variation de g' :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		∞
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	0	$\nearrow$	$g'(\frac{-1}{\sqrt{2}})$	$\searrow$	$g'(\frac{1}{\sqrt{2}})$	$\nearrow$	0

On peut alors prendre $\alpha = g'(-1/2) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-1/2}$.

c) Pour tout $n \geq 1$ on a donc, $|x_{n+1} - x_0| = |g(x_n - g(x_0)| \leq \alpha |x_n - x_0|$.

d) En appliquant successivement l'inégalité qu'on vient d'établir, on a :

$$|x_n - x_0| \leq \alpha |x_{n-1} - x_0| \leq \alpha^2 |x_{n-2} - x_0| \leq \ldots \leq \alpha^{n-1} |x_1 - x_0|.$$

D'où $0 \leq \lim\limits_{n \to \infty} |x_n - x_0| \leq |x_1 - x_0| \lim\limits_{n \to \infty} \alpha^{n-1}$. Comme $\alpha \in]0,1[$, on conclut que $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n - x_0| = 0$ ce qui est équivalent à $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

Exercice 3

1) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (x \ln(x) - x) = 0$. Utilisant la règle de l'Hospital on obtient :

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{(x\cos(x) - \sin(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{-\sin(x)}{2} = 0.$$

2) La dérivée à droite et la dérivée à gauche sont différentes : $\tilde{h}'_g(0) = -1/3 \neq \tilde{h}'_d(0) = -\infty$.

x	0	6	$+\infty$
$f(x)$			

x	$-\infty$		-5		-3		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\rightarrow$	0		-10	$\nearrow$	$+\infty$