Les 4 exercices sont indépendants. Justifiez toutes vos réponses. La qualité de présentation et de rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

1- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite croissante et calculer sa limite.

Soit $E = \left\{1 - \dfrac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

2- Montrer que l'ensemble E admet une borne supérieure et une borne inférieure.

3- Montrer que $\sup E \notin E$

Exercice 2. On considère la suite $(v_n)_n$ définie par $v_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 1$.

2) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k}$. En déduire que $(v_n)_n$ est une suite convergente.

4) On définie la suite $(w_n)_n$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_n^2$.

a- Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $w_{k+1} - w_k$.

b- En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

c- Déterminer la valeur de $\ell = \lim v_n$.

Exercice 3. Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1- Montrer que g est une **bijection croissante** d'un intervalle I dans un intervalle J que l'on déterminera.

On note $g^{-1} : J \to I$ la fonction inverse de g.

2- Donner l'expression explicite de la fonction g^{-1}.

3- Calculer de deux manières $(g^{-1})'(y)$ pour tout $y > 1$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Bonne Chance