Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Rabat

Automne 2011
Analyse SMIA1
Rattrapage
Durée 2H

Exercice 1. [1pt] Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $E(\frac{x+1}{2}) + E(\frac{x}{2}) = E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 2. [1,5pt] Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble :

$$\{\frac{m}{n} \ : \ n, m \in \mathbb{N}^*, 2n \leq m < 3n\}$$

Exercice 3. [7,5pts] Soit $f \ [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a & \text{si } \ x = 0 \\ b \arctan(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}) + c & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

où a, b et c sont des constantes.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

b) Donner le developpement limité à l'ordre 5 de f au voisinage de 0 sur]0,1] et sur [-1,0[.

c) Pour quelles valeurs de a, b et c la fonction f est dérivable en 0.

d) Dans le cas où f est dérivable sur]-1,1[, calculer sa dérivée. En déduire l'expression de f en fonction de arccos.

e) En utilisant la définition de f donner une expression simple de $f(\cos\theta)$ en fonction de a, b, c et θ pour $\theta \in [0, \pi]$

Exercice 4. [2,5pts]

a) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 montrer que pour tout $x > 0$ on a : $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

b) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in N^*}$ définie par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2})$$

Exercice 5. [2pts]

a) Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue.

b) f est-elle uniformement continue sur [0,1]?

Exercice 6. [5,5pts] Soient, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

a) Vérifier que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$

b) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite *notée* γ.

c) Montrer que $(a_{2n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(a_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$, où $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, sont adjacentes.

d) En déduire que $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge.

e) Calculer $a_{2n} + u_{2n} - u_n$, en déduire $\lim a_{2n}$, puis $\lim a_n$.