Université Mohammed V — Année Universitaire 2011-2012

Faculté des Sciences — Analyse SMIA1

Département de Mathématiques — Contrôle Final

Rabat — Durée 3H

Exercice 1.

a) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a $E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[/\{0\}$ par $f(x) = (1 + \arctan x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

a) Donner le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre 2.

b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

c) Soit g le prolongement par continuité de f en 0. Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

Exercice 3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + 2x - 6$.

a) Montrer qu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

b) Montrer que h est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l'on determinera.

Soit u_n la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et la donnée de $u_0 = a \in \mathbb{R}^+$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{6}{x^2+2}$.

c) Calculer $g(x) = f \circ f(x)$ et vérifier que $g(x) - x = -\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x^2+2)^2+18} h(x)$.

d) Etudier les suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ selon les valeurs de a

e) Etudier la suite $(u_n)_n$.

Exercice 4. Donner l'équation de l'asymptote au graphe au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{x-1}}$.

Exercice 5. Montrer que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$: on a $x < tan(x) < \dfrac{x}{\cos^2(x)}$

Exercice 6. On rappelle que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues

Soit $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ / qui vérifie P0, P1 et P2 $\}$

$P0 : \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(u+v) + f(u-v) = 2f(u)f(v)$

P1 : f n'est pas identiquement nulle

P2 : f s'annulle au moins une fois sur $\mathbb{R}$

Dans toute la suite on désigne par f un élément de $\mathcal{F}$

Partie I

a) Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est dans l'ensemble $\mathcal{F}$

b) Montrer que pour tout réel non nul α, la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = f(\alpha x)$ est dans $\mathcal{F}$

c) Montrer que $f(0) = 1$ (Indication poser $(u,v) = (x,0)$ dans P0)

d) Vérifier que f est une fonction paire.(Indication poser $(u,v) = (0,x)$ dans P0)

Posons $E = \{x \geq 0\ /\ f(x) = 0\}$

e) i) Montrer que E est non vide (Indication utiliser la parité de la fonction f et P2)

ii) En déduire que f admet une borne inférieure qui sera notée dans la suite du problème par a .

f) i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence d'un élément $x_n \in E$ qui vérifie $a \leq x_n < \frac{1}{n} + a$

ii) En déduire que $f(a) = 0$ et que $a > 0$

g) Montrer que : $\forall x \in [0, a[,\ f(x) > 0$. (Indication raisonner par l'absurde)

PartieII

Soit $g\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto g(x) = \cos(\dfrac{\pi}{2a}x)$

a) Soit $q \in \mathbb{N}$, montrer que $f(\dfrac{a}{2^q}) + 1 = 2\left[f(\dfrac{a}{2^{q+1}})\right]^2$

b) En déduire, en raisonnant par récurrence que, $\forall q \in \mathbb{N},\ \ f(\dfrac{a}{2^q}) = g(\dfrac{a}{2^q})$

c) Montrer que $D_a = \{a\dfrac{p}{2^q}\ \ /\ \ p \in \mathbb{Z}\ \ q \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

d) On admettra que $\forall x \in D_a$ on a $f(x) = g(x)$. Montrer alors que $f = g$.