

Les exercices sont indépendants. Justifiez toutes vos réponses.
La qualité de présentation et de rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Soit $A = \left\{ (-1)^n + \frac{n^2}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1- Montrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure.

2- Montrer que $\sup A = 2$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 3x E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

où $E(a)$ est la partie entière de a .

Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice 3. Soit h une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, $h'(x) \neq 0$.

a- Montrer que h est une bijection de $[a, b]$ dans $h([a, b])$.

b- **Pour cette question seulement**, on suppose que $h(a) < h(b)$. Montrer que pour tout $x \in]a, b[$ on a $h(a) < h(x) < h(b)$.

c- Montrer que la fonction h est strictement monotone.

Exercice 4. Soit g la fonction définie par : $\forall x > 0, g(x) = x + \ln(x)$

1- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} .

2- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n > 0$ tel que $g(u_n) = n$.

3- Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ et déterminer sa limite si elle existe.

IMPORTANT : Sous peine d'annulation de sa copie, l'étudiant(e) ne doit remettre aucun des renseignements demandés ci-dessus et doit signer soigneusement à la fin de sa composition.

EXC3. h dérivable sur $[a, b] / \forall x \in [a, b], h'(x) \neq 0$

h - On suppose que $h(a) < h(b)$. Mq $\forall x \in]a, b[$,
on a : $h(a) < h(x) < h(b)$

En effet, soit $x \in]a, b[$

Par l'absurde, supposons que $h(x) < h(a) < h(b)$.

Puisque h est continue sur l'intervalle $[x, b]$,
par le T.V.I., il existe $c \in [x, b] / h(c) = h(a)$

Ce qui est absurde car $a < x \leq c \leq b$, c-à-d
 $a \neq c$ et h est injective. D'où, on ne peut pas

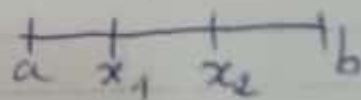
avoir $h(x) < h(a) < h(b)$. De m, supposons que
 $h(a) < h(b) < h(x) \Rightarrow \exists c \in [a, x] / h(c) = h(b)$.

Or, $a \leq c \leq x < b$, donc $c \neq b$ et $h(c) = h(b)$ abs
car h injective sur $[a, b]$. cf.

$h(a) < h(x) < h(b)$.

c - On va distinguer deux cas : soient $x_1, x_2 \in]a, b[$,
 $x_1 < x_2$.

(1) $h(a) < h(b) \xRightarrow{b)} h(a) < h(x_2) < h(b)$

Sur $]a, x_2[$, on a : $h(a) < h(x_2)$ 

D'où, $\forall x \in]a, x_2[$, $h(a) < h(x) < h(x_2)$

En particulier pour $x = x_1 \in]a, x_2[$, on a :

$h(a) < h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow h \uparrow$ strict
2ème cas : $h(b) < h(a)$. Le même raisonnement $\rightarrow$

NOM :

Prénom :

Né(e) le : à :

Filière : Semestre :

Épreuve de :

IMPORTANT : Sous peine d'annulation de sa copie, l'étudiant(e) ne doit omettre aucun des renseignements demandés ci-dessus et doit signer lisiblement à la fin de sa composition.

2^{ème} méthode. Puisque la sous-suite

$$U_2 = (-1)^2 + \frac{(2)^2}{(2)^2 + 1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2, \text{ alors,}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_{2n} - 2| < \varepsilon.$$

$$\text{Soit } \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow 2 - \varepsilon < U_{2n} < 2 + \varepsilon.$$

En particulier pour N_ε , on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} / 2 - \varepsilon < U_{2N_\varepsilon}$ et $\forall x \in A, x \leq 2$.

$$\text{al. } \sup(A) = 2.$$

EXQ2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 \frac{\sin(3x)}{3x} = 3$

$$\text{si } x < 0, \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

$$\text{D'où, } 3x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) > 3x E\left(\frac{1}{x}\right) \geq 3x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{Donc, } \begin{matrix} x \downarrow \\ 0^- \end{matrix} 3 > \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x E\left(\frac{1}{x}\right) \geq \begin{matrix} x \downarrow \\ 0^- \end{matrix} 3.$$

Par le théorème d'encaadrement, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$.

D'où, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$. Par conséquent,

de b) entraîne que : $\forall x \in]a, b[, h(b) < h(x) < h(a)$.

Dans le cas : sur l'intervalle $]a, b[, \overbrace{a \quad x_1 \quad x_2} \quad b$

$$h(b) < h(x_1) < h(a)$$

$$\text{sur }]x_1, b[, \forall x \in]x_1, b[, h(b) < h(x) < h(x_1)$$

En particulier pour $x = x_2 \in]x_1, b[, \text{ on a}$

$$h(b) < h(x_2) < h(x_1) \Rightarrow h \downarrow \text{ strict} \quad \Rightarrow$$

Ex 64 $\forall x > 0, g(x) = x + \ln(x)$.

1) g continue sur $]0, +\infty[$. De plus g dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$. D'où $g \uparrow$ strict.

D'après le Th de la bijection g est bijective de $]0, +\infty[$

$$\text{dans } g(]0, +\infty[) =]\lim_{0^+} g(x), \lim_{+\infty} g(x)[=]-\infty, +\infty[$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n > 0$ tel que $g(u_n) = n$.

On pose $\varphi(x) = g(x) - n$. φ continue sur $]0, +\infty[$ et

$$\lim_{0^+} \varphi(x) = -\infty, \lim_{+\infty} \varphi(x) = +\infty. \text{ Or, } n \in]-\infty, +\infty[$$

d'où par le T.V.I. $\exists u_n \in]0, +\infty[/ \varphi(u_n) = 0$

$$\text{ssi } \exists u_n > 0 / g(u_n) = n.$$

3) $u_{n+1} = n+1 > n = u_n \Rightarrow (u_n) \uparrow$. Or, $u_n = g^{-1}(n)$.

$$\lim_{+\infty} g^{-1}(n) = +\infty \text{ car } g^{-1} \uparrow \text{ strict. D'où, } \lim_{+\infty} u_n = +\infty.$$

Code :
Section : Groupe :
ANNEXE I
Salle / Amph. :
Date :

Prénom :
Né(e) le : à
Filière : Semestre :
Epreuve de :

Feuille
Supplémentaire
N°: 2/5

IMPORTANT : Sous peine d'annulation de sa copie, l'étudiant(e) ne doit omettre aucun des renseignements demandés ci-dessus et doit signer lisiblement à la fin de sa composition.

Or, pour n impair $(-1)^n + \frac{n^2}{n^2+1} = -1 + \frac{n^2}{n^2+1}$
 $= \frac{-n^2-1+n^2}{n^2+1} = \frac{-1}{n^2+1} < 0$. Puisque $1 \in A$,
la borne $\sup(A)$ ne peut pas être négative.

Donc, $\exists ? n \in \mathbb{N} \mid \beta < 1 + \frac{n^2}{n^2+1} < 2$, avec n un
entier naturel pair, soit $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

D'où, $\exists ? k \in \mathbb{N} \mid \beta < 1 + \frac{(2k)^2}{(2k)^2+1} < 2$

$\Leftrightarrow \exists ? k \in \mathbb{N} \mid (2k)^2 \cdot (2 - \beta) > -1 + \beta$.

Il suffit qu'il existe $k \in \mathbb{N} \mid k(2 - \beta) > \beta - 1$.

Ceci est assuré par la propriété d'Archimède.

Autrement dit, $\exists k \in \mathbb{N} \mid \beta < (-1)^{2k} + \frac{(2k)^2}{(2k)^2+1}$.

Ce qui est une contradiction car $\beta = \sup(A)$
est un majorant de A .

Cel. $\beta = \sup(A) = 2$.

IMPORTANT : Sous peine d'annulation de sa copie, l'étudiant(e) ne doit omettre aucun des renseignements demandés ci-dessus et doit signer lisiblement à la fin de sa composition

Un Corrigé.

Exce1. $A = \left\{ (-1)^n + \frac{n^2}{n^2+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$

1. Mq $\inf(A) \exists$ et $\sup(A) \exists$.

Si $n=0$, $(-1)^0 + \frac{0^2}{0^2+1} = 1 \in A$. D'où, $A \neq \emptyset$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 + \frac{n^2}{n^2+1} \leq (-1)^n + \frac{n^2}{n^2+1} \leq 1 + \frac{n^2}{n^2+1} < 2.$$

$$\text{D'où, } \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n + \frac{n^2}{n^2+1} < 2.$$

Par conséquent, $\forall x \in A, -1 \leq x < 2$.

Ed. $A \neq \emptyset$ et minorée $\Rightarrow \inf(A)$ existe

$A \neq \emptyset$ et majorée $\Rightarrow \sup(A)$ existe.

2. Mq $\sup(A) = 2$.

1^{ère} méthode : 2 est un majorant de A, d'où
 $\beta = \sup(A) \leq 2$ car $\sup(A)$ est le plus petit
 des majorants. Donc, il y a deux cas, soit
 $\beta < 2$ ou bien $\beta = 2$.

Supposons que $\beta < 2$. $\exists ? n \in \mathbb{N} /$

$$\beta < \underbrace{\left((-1)^n + \frac{n^2}{n^2+1} \right)}_{x \in A} < 2.$$

Prénom :

Né(e) le : 0

Feuille
Supplémentaire

N° 4/5

Filière : Semestre :

Epreuve de :

IMPORTANT : Sous peine d'annulation de sa copie, l'étudiant(e) ne doit omettre aucun des renseignements demandés ci-dessus et doit signer lisiblement à la fin de sa composition

f admet un prolongement par continuité en 0 donné par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ex 63. $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable $\forall x \in [a, b], h'(x) \neq 0$.

a. Mq h est bijective de $[a, b]$ dans $h([a, b])$.

La surjection est évidente. En effet,

soit $y \in h([a, b])$, d'où $\exists x \in [a, b] / y = h(x)$.

Par conséquent, tout élément $y \in h([a, b])$ admet un antécédent dans $[a, b]$.

El. h est surjective.

Montrons l'injection. Supposons par l'absurde, qu'il existe $x_1 \neq x_2 \in [a, b], h(x_1) = h(x_2)$.

Puisque h est continue sur le segment d'extrémités x_1 et x_2 et h est dérivable sur l'ouvert d'extrémités x_1 et x_2 , alors d'après le théorème de Rolle, $\exists c$ compris entre x_1 et x_2 tel que $h'(c) = 0$.

Ceci est absurde car $h'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$.

El. h est injective. D'où, h est bijective.