Université Mohammed V de Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

SMIA-S1 | Automne 2017
Analyse1 | Contrôle Final
Le 25 décembre 2017 | Durée :**1H30**

Les 4 exercices sont indépendants. Justifiez toutes vos réponses. La qualité de présentation et de rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ minorée et $B \neq \emptyset$, un sous-ensemble de A. Montrer que

$$\inf A \leq \inf B.$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x^2}$. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

a- Montrer que f est une bijection de $[0,1]$ vers $[0,1]$.

b- Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.

c- Est-ce que la suite $(u_n)_n$ converge ?

d- Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 3. Soient a et b deux réels. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = \begin{cases} (x-1)(\ln(x)-1) & \text{si } x \geq 1 \\ ax + \dfrac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{\sin(bx)}{x} - 2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1- Déterminer le réel a, pour que la fonction h soit continue en 1.

2- Montrer que h n'est pas dérivable en 1.

3- Déterminer b, pour que la fonction h admette un prolongement par continuité en 0.

4- Donner l'équation de la tangente à la courbe de h au point $(2, h(2))$.

Exercice 4. Soient c et d deux réels tels que $c < d$ et soit g une fonction deux fois dérivable sur $[c,d]$. On suppose que $g(c) = g(d) = 0$ et que pour tout $x \in]c,d[$, $g''(x) \leq 0$.

1) Montrer qu'il existe $x_0 \in [c,d]$ tel que $g'(x_0) = 0$.

2) Montrer que pour tout $x \in]c,d[$, $g(x) \geq 0$.

Bonne Chance

1. Corrigé

Solution de l'Exercice 1 : A et B sont deux parties non vides ($\emptyset \neq B \subset A$) et minorées, donc $a = \inf A$ et $b = \inf B$ existent. Par définition, on a : $\forall x \in A$, $x \geq a$. Donc a est aussi un minorant de $B \subset A$, et par conséquent $a \leq b$.

Solution de l'Exercice 2 :

a- La fonction f est continue et strictement croissante ($f'(x) = \dfrac{4x}{(2-x^2)^2}$), donc c'est une bijection de $[0,1]$ vers $[0,1]$.

b- Comme f est croissante, il suffit de comparer u_0 et u_1. On a $u_1 = f(u_0) = \dfrac{1}{3} < u_0$, donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

c- Comme f est à valeurs dans $[0,1]$, on a $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $(u_n)_n$ est décroissante et minorée, donc admet une limite ℓ.

d- Le réel ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$. Cette équation admet deux solutions dans $[0,1]$: 0 et 1. Or $\ell \leq u_0$, donc $\ell = 0$.

Solution de l'Exercice 3 :

1- Pour que h soit continue en 1, il faut que $\lim_{x\to 1} h(x) = 0$. En remarquant que $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x} = -1$, on a $a = 1$.

2- Il est clair que h est dérivable sur $[1, \infty[$ et on a $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'_d(1) = 0$. D'autre part $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x(x-1)+x\ln x}{((x-1)(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{2x+\ln x}{-2x+2} = -\infty$. Pour l'avant dernière inégalité, on a utilisé la règle de l'Hospital. La fonction h n'est donc pas dérivable à gauche de 1.

3- Pour que h admette un prolongement par continuité en 0, il faut qu'elle soit continue en 0. On a $\lim_{x\to 0^-} h(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} h(x) = b - 2$. Il faut donc que $b = 2$.

4- L'équation de la tangente à la courbe au point $(2, h(2))$ est donnée par : $y = h'(2)(x-2) + h(2) = (\ln 2 - 1/2)x - \ln 2 - 2$.

Solution de l'Exercice 4 :

1) D'après le théorème de Rolle, il existe $x_0 \in [c,d]$ tel que $g'(x_0) = 0$.

2) Comme $g''(x) \leq 0$ pour tout $x \in]c,d[$, la fonction g' est décroissante sur $]c,d[$. Ainsi, pour $0 \leq x \leq x_0$, $g'(x) \geq g'(x_0) = 0$ et par conséquent g est croissante sur $[c, x_0]$ et on a $g(x) \geq g(0) = 0$. Pour $x_0 \leq x \leq b$, $g'(x) \leq 0$ et par conséquent g est décroissante sur $[x_0, b]$ et on a $g(x) \geq g(b) = 0$.