

Exercice 1 :

On considère l'ensemble $A = \{\frac{n-1}{n+1}; n \in \mathbb{N}^*\}$.

- 1) L'ensemble A admet-il une borne supérieure?
- 2) L'ensemble A admet-il un plus grand élément?

Exercice 2 :

A) Soit F la fonction définie sur $] -\infty; -2[\cup] -2; +\infty[$ par $F(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

A1) Construire le tableau de variation de F . Préciser $F([0; 1])$.

A2) Montrer que l'équation $F(x) = x$ admet une unique solution dans $[0; 1]$.

On note a cette solution.

A3) Montrer que : $\forall x \in [0; 1] : \frac{1}{4} \leq F'(x) \leq \frac{2}{3}$.

B) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$.

B1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 1$.

B2) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3} |u_n - a|.$$

B3) En déduire que (u_n) converge vers a .

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}(2x)$.

- 1) Préciser le domaine de définition de f .
- 2) Montrer que f est injective.
- 3) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction réciproque de f est définie.
- 4) Résoudre l'équation $f(x) = \frac{2\pi}{3}$.

Exercice 4 :

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} \right)$.

2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x^2)}{x^3 \sin(x)} \right)$.

3) On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}$.

Est-il possible de prolonger f par continuité en 0?

Exercice 1.

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n+1} ; n \in \mathbb{N} \right\}$$

1/ on a : $-1 \in A$ pour $n=0$.
dnc $A \neq \emptyset$.

on a : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n-1}{n+1} < 1$.

dnc $\forall a \in A : a < 1$.

dnc A est majorée.

Et par suite $\sup(A)$ existe

on suppose que $\sup(A) = \alpha$.

dnc $\alpha < 1 \Rightarrow 1 - \alpha > 0$.

on prend $x=1$; $y = 1 - \alpha > 0$. Alors d'après Archimède
il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq n(1 - \alpha)$.

dnc $\frac{1}{n} < 1 - \alpha \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n}}_{\in A} > \underbrace{1 - \alpha}_{\sup(A)}$ Absurde.

Donc $\boxed{\sup(A) = 1}$.

2/ on suppose que $1 \in A$.

$\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{n-1}{n+1} = 1 \Rightarrow n-1 = n+1$

$\Rightarrow -1 = 1$ Absurde.

dnc $1 \notin A$.

dnc $\max(A)$ n'existe pas.

D'où A n'admet pas un plus grand élément.

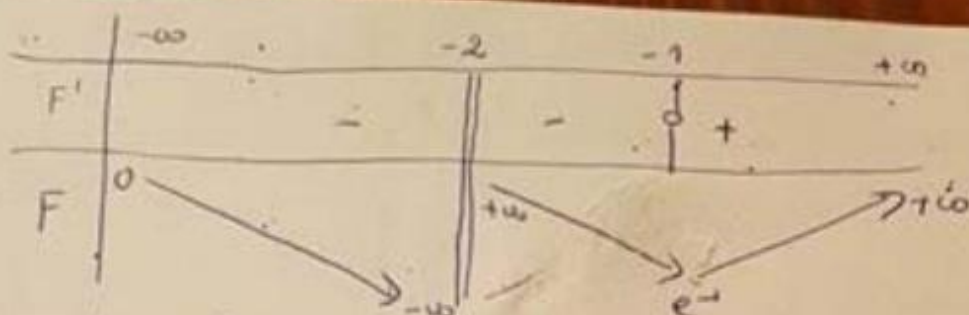
Exercice 2:

$$F(x) = \frac{e^x}{x+2}$$

$$\forall x \in]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$$

$\forall x \in \mathbb{D}$

$$F'(x) = \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \frac{(x+2-1)e^x}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} F(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} F(x) = -\infty$$

$$F(-1) = \frac{e^{-1}}{-1+2} = e^{-1}$$

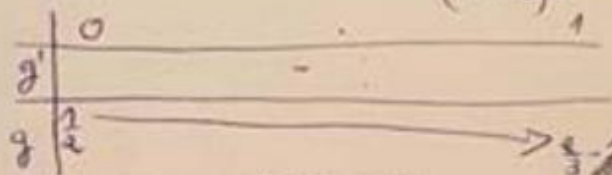
$$F([0, 1]) = [F(0); F(1)] = \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$$

$$F([0, 1]) = \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$$

on considère la fonction $g(x) = F(x) - x$ définie sur $[0, 1]$.

on a : g est continue sur $[0, 1]$ comme somme de fonctions continues sur $[0, 1]$.

$$\text{on a : } g'(x) = F'(x) - 1 = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2} - 1$$



Donc $\forall x \in [0, 1]; g'(x) < 0$.

Donc g est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

Donc g est une bijection de $[0, 1]$ dans $\left[\frac{2}{3}-1; \frac{1}{2}\right]$.

comme $0 \in \left[\frac{2}{3}-1; \frac{1}{2}\right]$.

Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$.

Donc l'équation $F(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0, 1]$.

$$3/ \text{ on a : } F'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$$

$$F''(x) = \frac{((x+1)e^x)'(x+2) - 2(x+1)e^x}{(x+2)^3} = \frac{(x^2 + 2x + 2)e^x}{(x+2)^3}$$

donc $\forall x \in [0, 1]; F''(x) > 0$.

Donc F' est strictement croissante sur $[0, 1]$.

comme $0 \leq x \leq 1$ Alors $F'(0) \leq F'(x) \leq F'(1)$.

$$\text{donc } \frac{1}{4} \leq F'(x) \leq \frac{2e}{9} \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{Donc } \forall x \in [0, 1]; \frac{1}{4} \leq F'(x) \leq \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$$

pour $n=0$; on a: $0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$. c'est vérifié.
On suppose que $0 \leq u_n \leq 1$ et on montre que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

on a: F est continue et strictement croissante sur $[0,1]$.

Inc $0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow F(0) \leq F(u_n) \leq F(1)$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq F(u_n) \leq \frac{2}{3} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \text{ est vérifié.}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 1$.

2/ on a: F est continue et dérivable sur $]a, u_n[\subset]0,1[$
Alors d'après TAF, il existe $c \in]a, u_n[$ tel que

$$|F'(c)| = \left| \frac{F(u_n) - F(a)}{u_n - a} \right| = \frac{|u_{n+1} - a|}{|u_n - a|}$$

et comme $|F'| \leq \frac{2}{3}$

$$\text{Alors } |u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3} |u_n - a| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3/ on a: $|u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3} |u_n - a|$

$$\hookrightarrow |u_n - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_1 - a|$$

$$|u_1 - a| \leq \frac{2}{3} |u_0 - a|$$

En faisant la multiplication terme à terme, on obtient:

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - a|$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - a = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{nombre}} |u_0 - a| = 0$ car $\frac{2}{3} < 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.

Donc (u_n) est une suite convergente qui converge vers a .

Exercice 3:

$$f(x) = \arcsin(x) + \arcsin(2x)$$

$$\begin{aligned} 1/ D_f &= \{ x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1; -1 \leq 2x \leq 1 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1; -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \} \end{aligned}$$

$$D_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

2/ on a: f est continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; c'est la somme de fonctions continues sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$$\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[: \text{on a: } f'(x) > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Donc f est bijective sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Donc f est injective.

3/ f est bijective de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ dans $[f(-\frac{1}{2}), f(\frac{1}{2})]$.

$$f(\frac{1}{2}) = \text{Arcsin}(\frac{1}{2}) + \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \text{ [20]}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \text{ [20]}$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$$

$$f \text{ étant impaire : en effet } f(-x) = \text{Arcsin}(-x) + \text{Arcsin}(-2x) = -\text{Arcsin}(x) - \text{Arcsin}(2x) = -f(x)$$

$$f([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$$

Donc la fonction réciproque est définie sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$

$$4/ f(x) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \text{Arcsin } x + \text{Arcsin } 2x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

$$S = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$$

Exercice 4:

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{(x^2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} \cdot \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1 - \cos x^2}{x^4}$$

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} = \frac{1}{2}$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0.
et sa fonction prolongement est donnée par:

$$\tilde{f} = \begin{cases} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(Khadja :)