Université Mohammed V

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Rabat

Année Universitaire 2012-2013

Analyse SMIA1

Contrôle 1

Durée 2H

Exercice 1. Démontrer que pour tout réel x

$$E(x)+E(x+\frac{1}{2})=E(2x).$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x. **0.5point définition 1.5points demonstration**

Exercice 2. Déterminer si elles existent la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble:

$$E=\{(-1)^n(1-\frac{1}{n+1}),\ \ n\in\mathbb{N}\}$$

1.5 si l'etudiant montre que E est majoré par 1 et minoré par -1 1.5 sup E=1 et Inf E=-1

Exercice 3. Déterminer un équivalent simple de

$$\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n+1}$$

1.5 point

Exercice 4. soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

a) Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes

$(u_{2n})_n$ **est decroissante 1point;** $(u_{2n+1})_n$ **est croissante 1point; suites adjacentes 1 point**

b) Que peut-on dire de la convergence de la suite (u_n) ?

1 point

Exercice 5.

a) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. **0.5 def densité+ 1.5point**

b) Vérifier que $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. **1 point**

Exercice 6. Soit (u_n) une suite décroissante

I a) Montrer que si la suite (u_n) est minorée alors elle est convergente. **1.5 point**

b) Montrer que si la suite (u_n) n'est pas minorée alors elle diverge vers $-\infty$. **1.5 point**

II On suppose de plus que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$

a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} n(u_n + u_{n+1})$. **1 point**

b) Montrer que $(u_n)_n$ converge vers 0. **1.5 point**

c) Donner un équivalent simple de (u_n). **1.5 point**