Université Mohammed V-Agdal,

Faculté des Sciences,

Département de Mathématiques

Semestre automne-hiver 2011

SMIA(1), Analyse

Contrôle continu n^o 1 (Sujet B)

Exercice 1. *(3pts)*

(1) *(1pt) Soit* $(a,b) \in (\mathbb{Q}^+)^2$, *tel que* $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$. *Montrer que* $2\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

(2) *(1pt) Montrer que, pour tout* $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, *la partie entière vérifie* $[x+n] = [x] + n$.

(3) *(1pt) Soit* $E =]0,2[$, *déterminer la borne inférieure* m *de* E ; m *est-il un minimum de* E ?

Exercice 2. *(3pts) Etudier la convergence de la suite récurrente* (u_n) *définie par :* $u_0 = a \in \mathbb{R}^+$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

Exercice 3. *(4pts) Soit* (ψ_n) *telle que :* $\psi_0 = 3$, $\psi_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\psi_{n+2} = \psi_{n+1} + \psi_n$.

(1) *(2pts) Exprimer, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, ψ_n *en fonction de* n.

(2) *(0.5pt) Vérifier que pour tout entier* n, $\psi_n > 0$ *et (1.5pt) déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$.

Exercice 4. *(2pts)* $\Longrightarrow$ *trivial (0.5pt)* $\Longleftarrow$ *(1.5pt)*

Soit (u_n) *une suite décroissante. Montrer que :*

$$(u_n) \text{ converge} \iff (u_{2n}) \text{ converge.}$$

Exercice 5. *(4pts) Soient, pour tout entier* $n \geq 2$,

$$u_n = (\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}) - 2(\sqrt{n}) \quad \text{et} \quad v_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}) - 2(\sqrt{n})$$

(1) *(2pts) Montrer que* (u_n) *et* (v_n) *convergent vers une même limite. Cette limite sera notée* c.

(2) *(1pt) Calculer la limite* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n})^{-1}(v_n)$, *(1pt) en déduire un équivalent simple de* $(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}})$.

Exercice 6. *(5.5pts) Soient* (u_n), (v_n) *deux suites réelles et* $E = \{u_n - v_m \ : \ (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$. *Supposons que* $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$ *et* $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$.

(1) *Soient* $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *et* $N \in \mathbb{N}$, *tel que pour tout* $n \geq N$, *on a* $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$.

(a) *(0.5pt) Justifier l'existence de* N.

(b) *(0.5pt) Montrer qu'il existe* $q \in \mathbb{N}$, *tel que* $u_N - v_q < x$. *En gardera* q *dans (c) et (d).*

(c) *(0.5pt) Vérifier que* $G = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N, \ u_n - v_q \geq x\}$ *est une partie non vide de* $\mathbb{N}$.

(d) *On admettra que* G *possède un plus petit élément. On notera* $p = \min(G)$.

(i) *(0.5pt)+(0.5pt) Vérifier que* $p \geq N + 1$ *et comparer* $u_{p-1} - v_q$, $u_p - v_q$ *et* x.

(ii) *(0.5pt) En déduire que* $|u_p - v_q - x| < \varepsilon$.

(2) *(1pt) Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *avec* $a < b$, *montrer que* $E \cap]a, b[\neq \emptyset$ *(ind. poser* $x = \frac{a+b}{2}$ *et* $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$*).*

(3) *(0.5pt) A-t-on* E *dense dans* $\mathbb{R}$ *? justifier votre réponse.*

(4) *(1pt) Vérifier que* $\{\ln(n + 1) - m \ : \ (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ *dense dans* $\mathbb{R}$.

Contrôle continu n° 1 (Corrigé du Sujet B)

Solution 1. (1) Si $2\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, alors $(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = 4a+b+4\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$. D'où $\sqrt{ab} = \frac{(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4a-b}{4} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc $4\sqrt{a}+\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

(2) On a $[x] \leq x < [x]+1$, donc $[x]+n \leq x+n < [x]+n+1$. Ainsi par définiton du partie entière $[x+n] = [x]+n$.

(3) ....

Solution 2. – L'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \sqrt{2+x}$, est bien définie et croissante.

– $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x)-x = \frac{2+x-x^2}{\sqrt{x+2}+x} = -\frac{(x-2)(x+1)}{\sqrt{x+2}+x}$. Donc $f(x)-x \geq 0$ (resp. ≤ 0) sur $[0,2]$ (resp. $[2,+\infty[$).

– Si $a \in [0,2]$, (u_n) est croissante et elle converge vers 2. Si $a \in [2,+\infty[$, (u_n) est décroissante et elle converge vers 2.

Solution 3. (1) L'équation caractéristique $x^2-x-1=0$, on a deux racines réelles $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(2) Il existe un unique $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\psi_n = a(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + b(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Le système donnée par les cas $n \in \{1,2\}$, permet de conclure que $(a,b) = (2,1)$.

(3) On a pour tout entier n, $\psi_n = 2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

(4) – Par récurrence à deux pas ou on remarquant que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{\sqrt{5}-1}{2} = |\frac{1-\sqrt{5}}{2}|$.

– On a $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > |\frac{1-\sqrt{5}}{2}|$; donc

$$\lim \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} = \frac{2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Solution 4. – D'après le cours, si (u_n) converge, alors (u_{2n+1}) converge.

– Si (u_n) diverge, alors $\lim u_n = -\infty$, donc $\lim u_{2n+1} = -\infty$ (cours). Donc (u_{2n+1}) diverge.

Solution 5. (1) – D'abord $u_n - v_n = -\frac{1}{n} \to 0$

–

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}) = \frac{1+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}-2(n+1)}{\sqrt{n+1}} = -\frac{n-2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+(n+1)}{\sqrt{n+1}} \leq 0$$

–

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + 2(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}) = \frac{1+2\sqrt{n}\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n}{\sqrt{n+1}} \geq 0$$

D'où (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite.

(2) – Soit $c = \lim v_n$, on a $\lim \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 0$.

- On a $0 = \lim \frac{v_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \lim(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}) - 2$, d'où $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}) \sim 2\sqrt{n}$.

Solution 6. (1) Par définition de convergence, on a $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$, donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$

(2) On a $\lim\limits_{m\to\infty} (u_N - v_m) = -\infty$, donc il existe $q \in \mathbb{N}$, pour tout $m \geq q$, $(u_N - v_m) < -|x| \leq x$.

(a) On a $p \in G$, donc $p \geq N$ de plus $p \neq N$, car $u_p - v_q \geq x$ et $u_N - v_q < x$. D'où $p \geq N + 1$.

(b) On a $p - 1 \geq N$ et $p - 1 \notin G$, donc $u_{p-1} - v_q < x \leq u_p - v_q$, de plus $|u_p - u_{p-1}| < \varepsilon$. Donc $|u_p - v_q - x| = u_p - v_q - x \leq (u_p - v_q) - (u_{p-1} - v_q) = u_p - u_{p-1} < \varepsilon$

(3) Posons $x = \frac{a+b}{2}$ et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $|u_p - v_q - x| < \varepsilon$, donc $a = x - \varepsilon < u_p - v_q < x + \varepsilon = b$.

(4) La question précédante montre que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, on a $E \cap]a, b[\neq \emptyset$. Donc E dense dans $\mathbb{R}$.

(5) Posons $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = n$. On a $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$ et $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$. Donc notre ensemble dense dans $\mathbb{R}$.