UNIVERSITE MOHAMMED V de RABAT

FACULTE DES SCIENCES

Cours d'Analyse I

Par

Pr. A. ZOGLAT

SMIA, S1

Automne 2020

Ces notes de cours sont destinées aux étudiants de S1 de la filière SMIA. Elles ont été rédigées, conformément au nouveau programme accrédité, dans le but d'aider les étudiants à consolider leurs acquis mathématiques et à maîtriser les nouvelles notions introduites dans ce cours.

Je serai reconnaissant à tout lecteur qui aura l'amabilité de me signaler des erreurs que peut comporter ce manuscrit ou de me suggérer une idée pour le parfaire.

A. Zoglat.

Table des matières

CHAPITRE 4

Fonctions Dérivables

4.1 Introduction

On montre expérimentalement qu'un objet qui, initialement au repos à une hauteur h du sol, tombe en chute libre se trouve après t secondes à la distance $y(t) = 4.9t^2$ de sa position initiale. La vitesse moyenne v_m à laquelle cet objet parcours la distance entre les deux points $y(t_1)$ et $y(t_2)$ est donnée par $v_m = \dfrac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} := \dfrac{\Delta y(t)}{\Delta t}$.

Il est connu que la vitesse de chute d'un tel objet augmente avec le temps. Quelle est alors la vitesse de cet objet à tout instant t ? On l'appelle vitesse instantanée de l'objet et on la note $v(t)$ pour souligner qu'elle dépend de t. La vitesse instantanée $v(t)$ est définie par $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y(t)}{\Delta t}$.

Dans ce chapitre nous étudierons les fonctions pour lesquelles ce genre de limite existe. Ces fonctions sont dites dérivables. La dérivabilité d'une fonction renseigne sur certaines particularités de son graphe. Elle permet d'identifier, entre autres :

— les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sur lesquelles elle est croissante ou décroissante,

— les points (quand ils existent) où la fonction est maximale ou minimale,

— les points où le graphe de la fonction est une courbe lisse ...

Nous préciserons ces notions et développerons leurs propriétés aux paragraphes suivants.

4.2 Fonction dérivable

4.2.1 Définitions

Définition 1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in I$.On dit que f est dérivable en x_0, si le ***taux d'accroissement*** $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. Cette limite, notée $f'(x_0)$, est appelée la dérivée de f au point x_0. On écrit alors

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f.

Exemple 1. La fonction définie par $f(x) = x^n$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)\sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x^{n-k-1}}{x-x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x^{n-k-1} \xrightarrow[x\to x_0]{} n x_0^{n-1}.$$

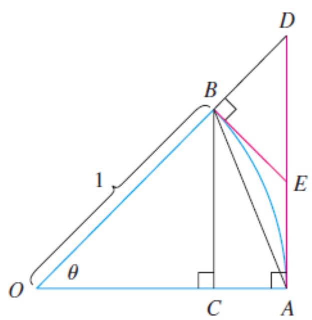
Cela montre que est dérivable et que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple 2. La fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en tout point $x_0 > 0$. En effet :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

d'où, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} = f'(x_0)$.

Exemple 3. La fonction $g : x \mapsto \sin x$ est dérivable en 0 et on a $g'(0) = 1$. En effet :



Par définition de la mesure d'un angle en "radian", $\theta = \mathrm{arc}AB$. On a aussi $|BC| = |OB|\sin\theta = \sin\theta$ et $|BC| < |AB| <\mathrm{arc}AB$. D'où

$$\sin\theta < \theta \quad \text{et donc} \quad \frac{\sin\theta}{\theta} < 1.$$

En considérant le triangle OAD, on voit que

$$\theta = \mathrm{arc}AB < |AE| + |EB| < |AE| + |ED| = |OA|\tan\theta = \tan\theta.$$

Ainsi on a $\theta < \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, d'où $\cos\theta < \dfrac{\sin\theta}{\theta} < 1$. Comme $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$, on a $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1 = g'(0)$.

Exemple 4. La fonction $g : x \mapsto \sin x$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et on a $g'(x) = \cos x$. En effet :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(x_0+\theta)-\sin x_0}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin x_0\cos\theta + \sin\theta\cos x_0 - \sin x_0}{\theta} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\Big[\frac{\sin x_0\cos\theta - \sin x_0}{\theta} + \frac{\cos x_0 \sin\theta}{\theta}\Big] = \lim_{\theta\to 0}\Big[\sin x_0\frac{\cos\theta-1}{\theta} + \cos x_0\frac{\sin\theta}{\theta}\Big]
\end{aligned}$$

D'autre part on a,

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\Big[\frac{\cos\theta-1}{\theta}\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta+1}\Big] = \lim_{\theta\to 0}\Big[\frac{\cos^2\theta-1}{\theta(\cos\theta+1)}\Big] = -\lim_{\theta\to 0}\Big[\frac{\sin^2\theta}{\theta(\cos\theta+1)}\Big] \\
&= -\lim_{\theta\to 0}\Big[\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\Big] = -\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1} = 1\times\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1} = 0
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \sin x_0 \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cos\theta-1}{\theta} + \cos x_0\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = \cos x_0$.

Proposition 1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in I =]a, b[$.

a) Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

b) Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ un point donné. Supposons que f soit dérivable en x_0 et montrons qu'elle est continue en x_0. Pour tout $x \neq x_0$, on a $f(x) = (x - x_0)\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)$. D'où, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

L'exemple suivant montre que la réciproque de ce résultat est fausse.

Exemple 5. La fonction $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ est-elle dérivable en x_0 ?

Les limite à droite et à gauche de x_0 du taux d'accroissement existent et on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$. Mais f n'est pas dérivable en 0 car ces limites sont différentes ce qui implique que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ n'existe pas.

4.2.2 Dérivée à droite et à gauche en un point

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant x_0. on dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) de x_0 si le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite à droite (resp. une limite à gauche) en x_0 et sera notée $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$)

Proposition 2. Une fonction f définie sur $I =]a, b[$ contenant x_0 est dérivable en x_0 si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Lorsqu'une fonction f est dérivable en x_0, il est possible d'approcher la valeur de f dans un voisinage de x_0 par celle d'une droite. Plus exactement, nous avons le résultat suivant :

Proposition 3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in I$. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ avec

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\epsilon(x).$$

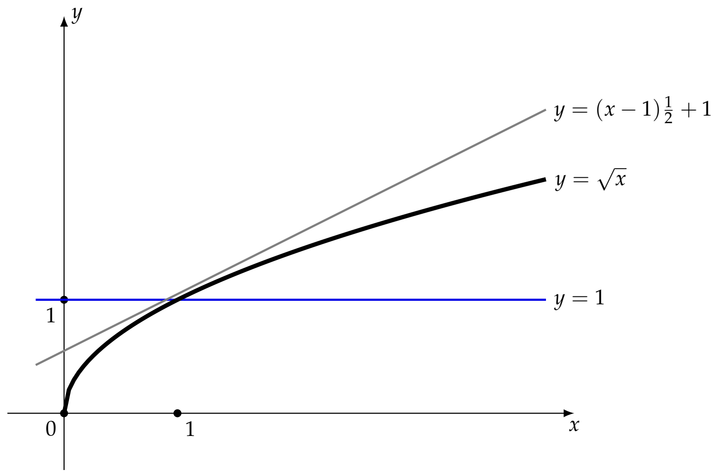
Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Si f est dérivable en x_0 alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Posons $\ell = f'(x_0)$. La fonction ϵ définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par $\epsilon(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell$ vérifie les conditions de la proposition.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Évident. □

En d'autres termes on a $f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0$ lorsque x est très proche de x_0. Nous illustrons cela par l'exemple suivant.

Exemple 6. Supposons que l'on cherche une valeur approchée de $\sqrt{1,01}$. Comme $1,01$ est proche de 1 et que $\sqrt{1} = 1$ on doit s'attendre à ce que $\sqrt{1,01}$ sera proche de 1.

Notons f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$. La fonction f est continue en $x_0 = 1$ et donc que pour x suffisamment proche de x_0, $f(x)$ est proche de $f(x_0)$.



Nous pouvons faire mieux qu'approcher notre fonction par une droite horizontale ! Essayons avec une droite quelconque. Quelle droite se rapproche le plus du graphe de f autour de x_0 ? Elle doit passer par le point $(x_0, f(x_0))$ et doit «coller» le plus possible au graphe : c'est la tangente au graphe en x_0. Une équation de la tangente est

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$

où $f'(x_0)$ désigne le nombre dérivé de f en x_0.

Remarque 1. Une fonction f est dérivable en x_0 si son graphe est "lisse" autour du point $(x_0, f(x_0))$.

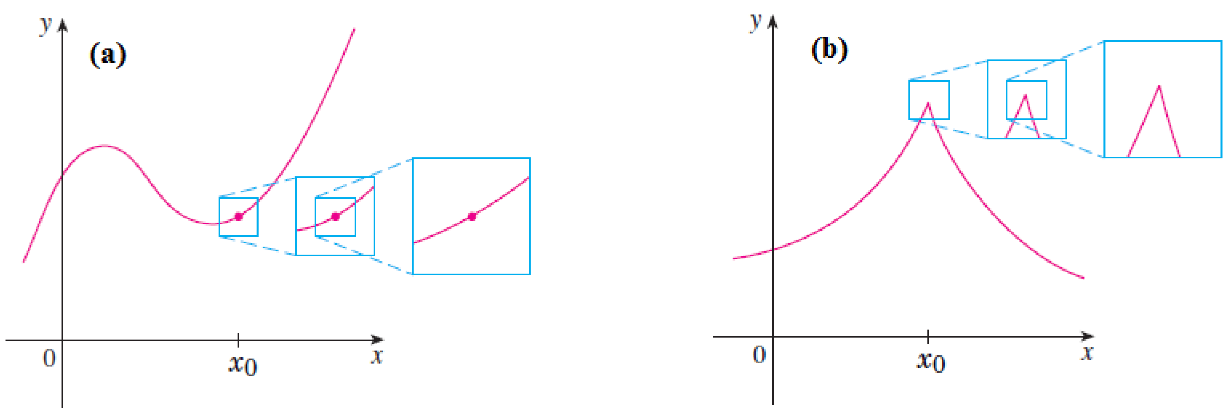


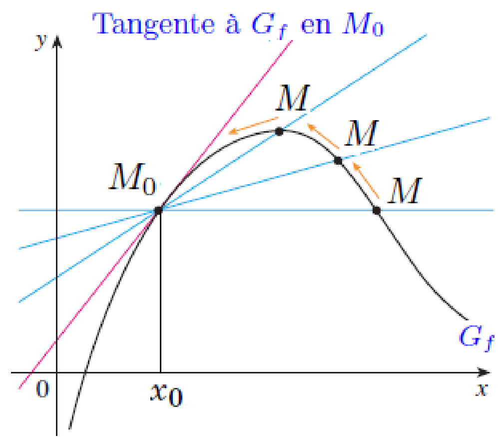
FIGURE 4.1 – (a) Graphe "lisse" en $(x_0, f(x_0))$. (b) Graphe pas "lisse" en $(x_0, f(x_0))$.

4.2.3 Tangente en un point

La droite qui coupe le graphe G_f d'une fonction f en M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0)$ et M de coordonnées $(x, f(x)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Si la fonction f est dérivable en x_0, la droite tangente à G_f en x_0 (qui ne touche G_f qu'au point M_0) a pour coefficient directeur $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

L'équation de la tangente à G_f en $(x_0, f(x_0)$ est donnée par : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.



4.3 Calcul des dérivées

4.3.1 Somme et produit

Proposition 4. Soient $f,g : I\to\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x\in I$:

— $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$,

— $(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,

— $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (si $g(x)\neq 0$).

– $(\lambda f)'(x)=\lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé,

– $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x)=-\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$ (si $f(x)\neq 0$),

Remarque 2. Il est plus facile de mémoriser les égalités de fonctions :

$$(f+g)'=f'+g',\quad (\lambda f)'=\lambda f',\quad (f\times g)'=f'g+fg',\quad \left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2},\quad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

Démonstration. Prouvons par exemple $(f\times g)'=f'g+fg'$.

Fixons $x_0\in I$. Pour $x\in I$ et $x\neq x_0$ on a :

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0).$$

Donc en passant à la limite on obtient $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$. □

4.3.2 Dérivée d'une composition

Proposition 5. Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée :

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle ci-dessus pour le produit en écrivant cette fois :

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} g'\big(f(x_0)\big) \times f'(x_0).$$

□

Exemple 7. Calculons la dérivée de $\ln(1 + x^2)$. Nous avons $g(x) = \ln(x)$ avec $g'(x) = \frac{1}{x}$; et $f(x) = 1 + x^2$ avec $f'(x) = 2x$. Alors la dérivée de $\ln(1 + x^2) = g \circ f(x)$ est

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = g'\big(1 + x^2\big) \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Corollaire 1. Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}}$$

Démonstration. Notons $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Soit $y_0 \in J$ et $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Le taux d'accroissement de g en y_0 est :

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - x_0}{f\big(g(y)\big) - f(x_0)}$$

Lorsque $y \to y_0$ alors $g(y) \to g(y_0) = x_0$ et donc ce taux d'accroissement tend vers $\frac{1}{f'(x_0)}$. Ainsi $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. □

Remarque 3. Il peut être plus simple de retrouver la formule à chaque fois en dérivant l'égalité

$$f\big(g(x)\big) = x$$

où $g = f^{-1}$ est la bijection réciproque de f.

En effet à droite la dérivée de x est 1 ; à gauche la dérivée de $f\big(g(x)\big) = f \circ g(x)$ est $f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$. L'égalité $f\big(g(x)\big) = x$ conduit donc à l'égalité des dérivées :

$$f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 1.$$

Mais $g = f^{-1}$ donc

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

4.3.3 Exemples

La fonction sin : $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ est une fonction dérivable dont la dérivée est positive. Elle est donc bijective et admet une fonction réciproque notée arcsin. Comme la dérivée de la fonction sin ne s'annule pas sur $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la fonction réciproque arcsin est donc dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

De même, la fonction cos : $[0,\pi] \to [-1,1]$ est une bijection dérivable dont la dérivée ne s'annule pas sur $]0,\pi[$. Sa fonction réciproque arccos est donc dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

1) Montrer que f possède une fonction réciproque f^{-1} et trouver son domaine de définition.
2) Démontrer que, $\forall x \in D_{f^{-1}}$, on a $f^{-1}(x) + \arcsin \frac{1}{x} = \pi$
3) Trouver l'ensemble où f^{-1} est dérivable et calculer $(f^{-1})'$

4.3.4 Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions (voir paragraphe suivant), u représente une fonction $x \mapsto u(x)$.

Fonction	**Dérivée**
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	**Dérivée**
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Remarque 4.

— Notez que les formules pour x^n, $\frac{1}{x}$ $\sqrt{x}$ et x^α sont aussi des conséquences de la dérivée de l'exponentielle. Par exemple $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et donc

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha \ln x}) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \frac{1}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

— Si vous devez dériver une fonction avec un exposant dépendant de x il faut absolument repasser à la forme exponentielle. Par exemple si $f(x) = 2^x$ alors on réécrit d'abord $f(x) = e^{x \ln 2}$ pour pouvoir calculer $f'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \ln 2} = \ln 2 \cdot 2^x$.

4.3.5 Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la ***dérivée seconde*** de f. Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

Si la ***dérivée*** $n^{\text{ème}}$ $f^{(n)}$ existe on dit que f est n ***fois dérivable***.

Théorème 1. [Formule de Leibniz]

$$\boxed{(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \ldots + \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \ldots + f \cdot g^{(n)}}$$

Autrement dit :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme de Newton et les coefficients que l'on obtient sont les mêmes.

Exemple 8.

— Pour $n = 1$ on retrouve $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.

— Pour $n = 2$, on a $(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

Exemple 9. Calculons les dérivées n-ième de $\exp(x) \cdot (x^2 + 1)$ pour tout $n \geq 0$. Notons $f(x) = \exp(x)$ alors $f'(x) = \exp(x)$, $f''(x) = \exp(x)$,...,$f^{(k)}(x) = \exp(x)$. Notons $g(x) = x^2 + 1$ alors $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$ et pour $k \geq 3$, $g^{(k)}(x) = 0$.

Appliquons la formule de Leibniz :

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \cdot g^{(1)}(x) + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cdot g^{(2)}(x) + \binom{n}{3} f^{(n-3)}(x) \cdot g^{(3)}(x) + \ldots$$

On remplace $f^{(k)}(x) = \exp(x)$ et on sait que $g^{(3)}(x)$, $g^{(4)}(x) = 0$,... Donc cette somme ne contient que les trois premiers termes :

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \exp(x) \cdot (x^2 + 1) + \binom{n}{1} \exp(x) \cdot 2x + \binom{n}{2} \exp(x) \cdot 2.$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$(f\cdot g)^{(n)}(x) = \exp(x)\cdot\Big(x^2+2nx+\frac{n(n-1)}{2}+1\Big).$$

Exercice 2.

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $f_1(x) = x\ln x$, $f_2(x) = \sin\frac{1}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$, $f_4(x) = \big(\ln(\frac{1+x}{1-x})\big)^{\frac{1}{3}}$, $f_5(x) = x^x$, $f_6(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$.
2. On note $\Delta(f) = \frac{f'}{f}$. Calculer $\Delta(f\times g)$.
3. Soit f $:]1,+\infty[\to]-1,+\infty[$ définie par $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection. Notons $g = f^{-1}$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
4. Calculer les dérivées successives de $f(x) = \ln(1+x)$.
5. Calculer les dérivées successives de $f(x) = \ln(x)\cdot x^3$.

4.4 Extremum local, théorème de Rolle

4.4.1 Extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 3.

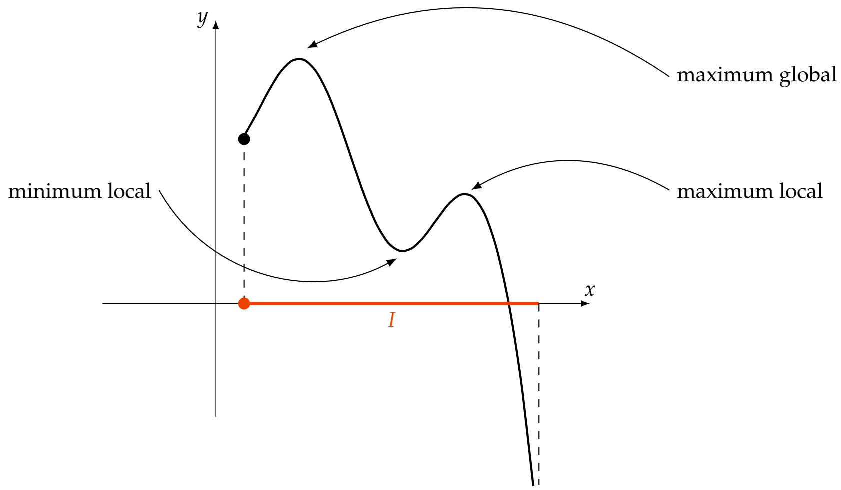
— On dit que x_0 est un ***point critique*** de f si $f'(x_0) = 0$.

— On dit que f admet un ***maximum local en*** x_0 (resp. un ***minimum local en*** x_0) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\text{pour tout } x \in I\cap J \quad f(x) \leq f(x_0)$$

(resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

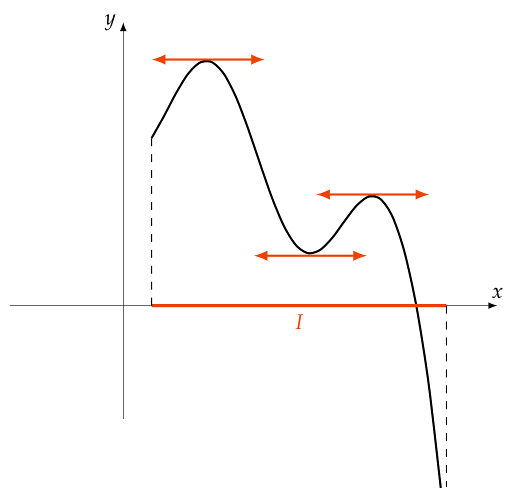
— On dit que f admet un ***extremum local en*** x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.



Dire que f a un maximum local en x_0 signifie que $f(x_0)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de x_0. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un ***maximum global*** en x_0 si pour toutes les autres valeurs $f(x)$, $x \in I$ on a $f(x) \leq f(x_0)$ (on ne regarde donc pas seulement les $f(x)$ pour x proche de x_0). Bien sûr un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.

Théorème 2. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

En d'autres termes, un maximum local (ou un minimum local) x_0 est toujours un point critique. Géométriquement, au point $(x_0, f(x_0))$ la tangente au graphe est horizontale.

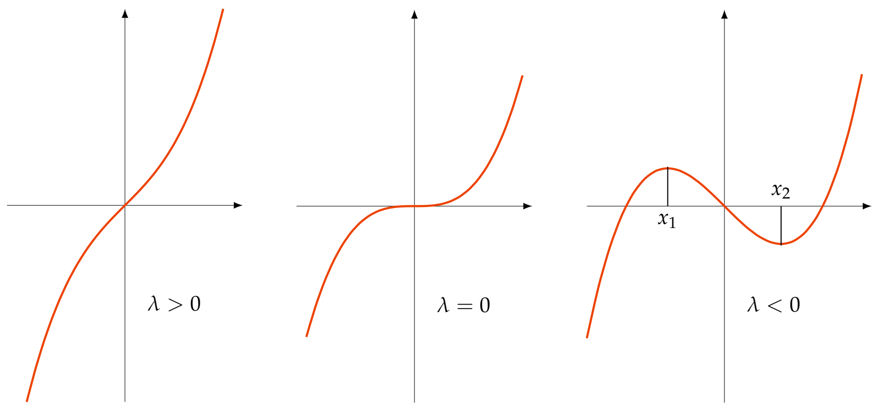


Exemple 10. Étudions les extremums de la fonction f_λ définie par $f_\lambda(x) = x^3 + \lambda x$ en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. La dérivée est $f'_\lambda(x) = 3x^2 + \lambda$. Si x_0 est un extremum local alors $f'_\lambda(x_0) = 0$.

— Si $\lambda > 0$ alors $f'_\lambda(x) > 0$ et ne s'annule jamais il n'y a pas de points critiques donc pas non plus d'extremums. En anticipant sur la suite : f_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

— Si $\lambda = 0$ alors $f'_\lambda(x) = 3x^2$. Le seul point critique est $x_0 = 0$. Mais ce n'est ni un maximum local, ni un minimum local. En effet si $x < 0$, $f_0(x) < 0 = f_0(0)$ et si $x > 0$, $f_0(x) > 0 = f_0(0)$.

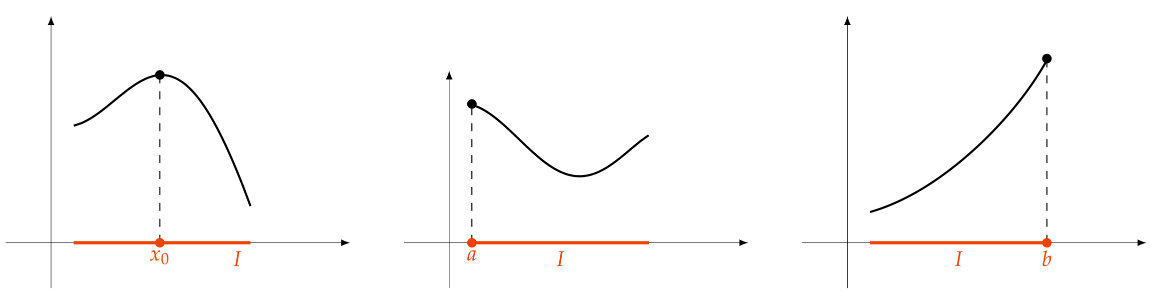
— Si $\lambda < 0$ alors $f'_\lambda(x) = 3x^2 - |\lambda| = 3\big(x + \sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}\big)\big(x - \sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}\big)$. Il y a deux points critiques $x_1 = -\sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}$ et $x_2 = +\sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}$. En anticipant sur la suite : $f'_\lambda(x) > 0$ sur $]-\infty, x_1[$ et $]x_2, +\infty[$ et $f'_\lambda(x) < 0$ sur $]x_1, x_2[$. Maintenant f_λ est croissante sur $]-\infty, x_1[$, puis décroissante sur $]x_1, x_2[$, donc x_1 est un maximum local. D'autre part f_λ est décroissante sur $]x_1, x_2[$ puis croissante sur $]x_2, +\infty[$ donc x_2 est un minimum local.



Remarque 5.

1. La réciproque du théorème 2 est fausse. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $x_0 = 0$ n'est ni maximum local ni un minimum local.

2. L'intervalle du théorème 2 est ouvert. Pour le cas d'un intervalle fermé, il faut faire attention aux extrémités. Par exemple si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable qui admet un extremum en x_0, alors on est dans l'une des situations suivantes :
   — $x_0 = a$,
   — $x_0 = b$,
   — $x_0 \in]a, b[$ et dans ce cas on a bien $f'(x_0) = 0$ par le théorème 2.
   Aux extrémités on ne peut rien dire pour $f'(a)$ et $f'(b)$, comme le montre les différents maximums sur les dessins suivants.



3. Pour déterminer $\max_{[a,b]} f$ et $\min_{[a,b]} f$ (où $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable) il faut comparer les valeurs de f aux différents points critiques et en a et en b.

Preuve du théorème. Supposons que x_0 soit un maximum local de f, soit donc J l'intervalle ouvert de la définition contenant x_0 tel que pour tout $x \in I \cap J$ on a $f(x) \leq f(x_0)$.

— Pour $x \in I \cap J$ tel que $x < x_0$ on a $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x - x_0 < 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ et donc à la limite $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.

— Pour $x \in I \cap J$ tel que $x > x_0$ on a $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x - x_0 > 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ et donc à la limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.

Or f est dérivable en x_0 donc

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

La première limite est positive, la seconde est négative, la seule possibilité est que $f'(x_0) = 0$. □

4.4.2 Théorème de Rolle

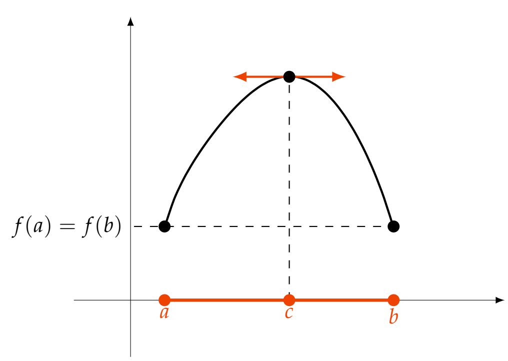
Théorème 3. [Théorème de Rolle] Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

— f est continue sur $[a, b]$,

— f est dérivable sur $]a, b[$,

— $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

Démonstration. Tout d'abord, si f est constante sur $[a, b]$ alors n'importe quel $c \in]a, b[$ convient. Sinon il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(x_0) > f(a)$. Alors f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$, donc elle admet un maximum en un point $c \in [a, b]$. Mais $f(c) \geq f(x_0) > f(a)$ donc $c \neq a$. De même comme $f(a) = f(b)$ alors $c \neq b$. Ainsi $c \in]a, b[$. En c, f est donc dérivable et admet un maximum (local) donc $f'(c) = 0$. □

Exemple 11. Soit $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_n)$ un polynôme ayant n racines réelles différentes : $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.

1. *Montrons que P' a $n-1$ racines distinctes.*

   On considère P comme une fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$. P est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $P(\alpha_1) = 0 = P(\alpha_2)$ alors par le théorème de Rolle il existe $c_1 \in]\alpha_1, \alpha_2[$ tel que $P'(c_1) = 0$. Plus généralement, pour $1 \leq k \leq n-1$, comme $P(\alpha_k) = 0 = P(\alpha_{k+1})$ alors le théorème de Rolle implique l'existence de $c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $P'(c_k) = 0$. Nous avons bien trouvé $n-1$ racines de P' : $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-1}$. Comme P' est un polynôme de degré $n-1$, toutes ses racines sont réelles et distinctes.

2. *Montrons que $P + P'$ a $n-1$ racines distinctes.*

   L'astuce consiste à considérer la fonction auxiliaire $f(x) = P(x) \exp x$. f est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. f s'annule comme P en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

   La dérivée de f est $f'(x) = \big(P(x) + P'(x)\big) \exp x$. Donc par le théorème de Rolle, pour chaque $1 \leq k \leq n-1$, comme $f(\alpha_k) = 0 = f(\alpha_{k+1})$ alors il existe $\gamma_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $f'(\gamma_k) = 0$. Mais comme la fonction exponentielle ne s'annule jamais alors $(P + P')(\gamma_k) = 0$. Nous avons bien trouvé $n-1$ racines distinctes de $P + P'$: $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{n-1}$.

3. *Déduisons-en que $P + P'$ a toutes ses racines réelles.*

   $P + P'$ est un polynôme à coefficients réels qui admet $n-1$ racines réelles. Donc $(P + P')(X) = (X - \gamma_1) \ldots (X - \gamma_{n-1}) Q(X)$ où $Q(x) = X - \gamma_n$ est un polynôme de degré 1. Comme $P + P'$ est à coefficients réels et que les γ_i sont aussi réels, ainsi $\gamma_n \in \mathbb{R}$. Ainsi on a obtenu une n-ième racine réelle γ_n (pas nécessairement distincte des autres γ_i).

Exercice 3.

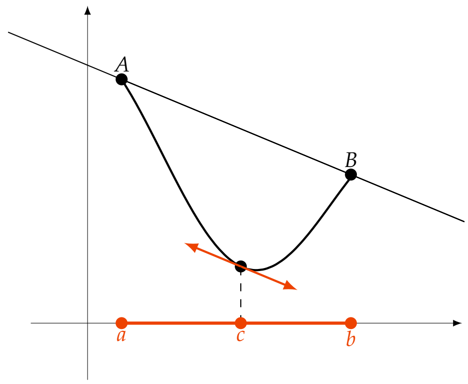
1. Dessiner le graphe de fonctions vérifiant : f_1 admet deux minimums locaux et un maximum local; f_2 admet un minimum local qui n'est pas global et un maximum local qui est global; f_3 admet une infinité d'extremum locaux; f_4 n'admet aucun extremum local.
2. Calculer en quel point la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet un extremum local.
3. Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Montrer qu'il existe c_1, c_2 tels que $f'(c_1) = 0$ et $f'(c_2) = 0$. Montrer qu'il existe c_3 tel que $f''(c_3) = 0$.
4. Montrer que chacune des trois hypothèses du théorème de Rolle est nécessaire.

4.5 Théorème des accroissements finis

4.5.1 Théorème des accroissements finis

Théorème 4. [Théorème des accroissements finis] Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)}$$



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Démonstration. Posons $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g(x) = f(x) - \ell \cdot (x-a)$. Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b-a) = f(a)$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - \ell$. Ce qui donne $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

4.5.2 Inégalité des accroissements finis

Corollaire 2. [Inégalité des accroissements finis] Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M tel que pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leq M$ alors

$$\boxed{\forall x, y \in I \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leq M|x-y|}$$

Démonstration. Fixons $x, y \in I$, il existe alors $c \in]x, y[$ ou $]y, x[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$ et comme $|f'(c)| \leq M$ alors $\left|f(x) - f(y)\right| \leq M|x-y|$. □

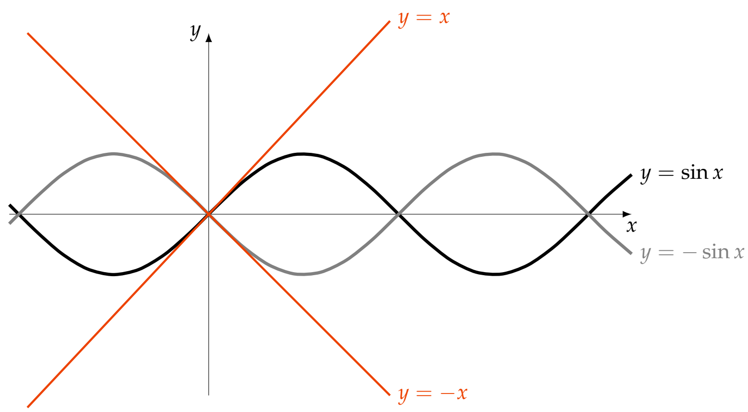
Exemple 12. Soit $f(x) = \sin x$. Comme $f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors :

$$\text{pour tous } x, y \in \mathbb{R} \qquad |\sin x - \sin y| \leq |x-y|.$$

En particulier si l'on fixe $y = 0$ alors on obtient

$$\boxed{|\sin x| \leq |x|}$$

ce qui est particulièrement intéressant pour x proche de 0.



4.5.3 Fonction croissante et dérivée

Corollaire 3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. $\forall x \in]a, b[$,

1. $f'(x) \geq 0 \iff f$ est croissante ($f'(x) \leq 0 \iff f$ est décroissante.)
2. $f'(x) = 0 \iff f$ est constante ;
3. $f'(x) > 0 \implies f$ est strictement croissante ($f'(x) < 0 \implies f$ est strictement décroissante.)

Remarque 6. La réciproque au point (3) est fausse. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Démonstration. Prouvons par exemple (1).

Sens $\Longrightarrow$. Supposons d'abord la dérivée positive. Soient $x, y \in]a, b[$ avec $x \leq y$. Alors par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Mais $f'(c) \geq 0$ et $x - y \leq 0$ donc $f(x) - f(y) \leq 0$. Cela implique que $f(x) \leq f(y)$. Ceci étant vrai pour tout x, y alors f est croissante.

Sens $\Longleftarrow$. Réciproquement, supposons que f est croissante. Fixons $x \in]a, b[$. Pour tout $y > x$ nous avons $y - x > 0$ et $f(y) - f(x) \geq 0$, ainsi le taux d'accroissement vérifie $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$. À la limite, quand $y \to x$, ce taux d'accroissement tend vers la dérivée de f en x et donc $f'(x) \geq 0$. □

4.5.4 Règle de l'Hospital

Corollaire 4. [Règle de l'Hospital] Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \quad g'(x) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Si} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.}$$

Démonstration. Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$. Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$, • h est dérivable sur $]a, x_0[$, • $h(x_0) = h(a) = 0$.

Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(c_a) = 0$.

Or $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$ donc $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$. Comme g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$ cela conduit à $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)}$. Comme $a < c_a < x_0$ lorsque l'on fait tendre a vers x_0 on obtient $c_a \to x_0$. Cela implique

$$\lim_{a\to x_0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a\to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \lim_{c_a\to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \ell.$$

$\square$

Exemple 13. Calculer la limite en 1 de $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. On vérifie que :

— $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$, $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$,

— $g(x) = \ln(x)$, $g(1) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,

— Prenons $I =]0, 1]$, $x_0 = 1$, alors g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 3.$$

Donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 3.$$

Exercice 4.

1. Soit $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$. Étudier la fonction f. Tracer son graphe. Montrer que f admet un minimum local et un maximum local.
2. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[100, 101]$. En déduire l'encadrement $10 + \frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \frac{1}{20}$.
3. Appliquer le théorème des accroissements finis pour montrer que $\ln(1 + x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$ (pour tout $x > 0$).
4. Soit $f(x) = e^x$. Que donne l'inégalité des accroissements finis sur $[0, x]$?
5. Appliquer la règle de l'Hospital pour calculer les limites suivantes (quand $x \to 0$) : $\dfrac{x}{(1+x)^n - 1}$; $\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$; $\dfrac{1-\cos x}{\tan x}$; $\dfrac{x - \sin x}{x^3}$.