

Serie III

(21)

Exercice I.

1) on considère le polynôme $P = \prod_{k=1}^n \left(X \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right)$ ($n \geq 2$)

calculer le reste de la division euclidienne du polynôme P par $Q = X^2 + 1$

2) calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$

Corrigé :

$$1) P(1) = \prod_{k=1}^n \left(1 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right)$$

$$= \prod_{k=1}^n e^{i \frac{k\pi}{n}}$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^n i \frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= \exp\left(i \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n k\right) = \exp\left(\frac{i \pi n(n+1)}{2n}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{i \pi (n+1)}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right) = a + ib$$

$$\bullet \text{ si } n \equiv 1[4] \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}(4k+2)\right) = -1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}(4k+2)\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ si } n \equiv 2[4] \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ si } n \equiv 3[4] \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$e) P = (X-1)^2 Q + R$$

$$\Rightarrow R = aX + b$$

$$\text{donc } \begin{cases} X^n + X + 1 = (X-1)^2 Q + aX + b \\ nX^{n-1} + 1 = 2(X-1)Q + (X-1)Q' + a \end{cases}$$

$$\text{on remplace avec le système obtenu } \begin{cases} 3 = a + b \\ n + 1 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = n + 1 \\ b = 2 - n \end{cases}$$

$$\text{d'où } R = (n+1)X + (2-n)$$

Exercice II.

(22)

- 1) soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrez que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P alors son conjugué $\bar{z}$ est aussi une racine de P .
- 2) Déterminez les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(x^2 + x + 1)^2$ divise $(x+1)^n - x^n - 1$.

conjugue :

$$1) P \in \mathbb{R}[X], P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

z est une racine de P alors

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = 0$$

$$P(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k = 0$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k \overline{z^k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k}$$

$$= \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k}$$

$$= \overline{0} = 0$$

$$2) \text{ soit l'équation } x^2 + x + 1 = 0$$

$$\text{les racines de } x^2 + x + 1 \text{ est } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\bar{z} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{avec } (x-z)/(x^2+x+1)$$

$$= x^2 + x + 1 / p$$

$$\Rightarrow (x-z)^2 / p$$

$$= (x-z)^2 / p$$

$$\text{d'après } (x-\bar{z}) / p$$

$$\Rightarrow (x-z)^2 (x-\bar{z})^2 / p$$

$$x^2 + x + 1 / p$$

$$\begin{cases} P(z) = 0 \\ P'(z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'(z) = 2z + 1 = 0 \\ P(z) = z^2 + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Exercice III:

Déterminer l'ensemble des couples $(U, V) \in \mathbb{R}(x)^2$ vérifiant l'égalité suivante:

$$(x^2 - x - 1)U + (x^5 + 1)V = 1$$

(23)

Corrigé:

$$\text{Posons } P = x^2 - x - 1$$

$$Q = x^5 + 1$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x - 1 & x^5 + 1 \\ -x^2 - x^2 & x^2 \\ \hline -x^2 - x - 1 & \end{array}$$

$$P = Qx^2 - (x^2 + x + 1)$$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 1 & x^2 + x + 1 \\ -x^5 - x^4 - x^3 & x^3 - x^2 + 1 \\ \hline -x^4 - x^3 + 1 & \\ x^4 + x^3 + x^2 & \\ \hline x^2 + 1 & \\ -x^2 - x - 1 & \\ \hline -x & \end{array}$$

$$\text{donc } Q = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) + (-x)$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x + 1 & -x \\ -x^2 & -x - 1 \\ \hline x + 1 & \\ -x & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$x^2 + x + 1 = (-x)(-x - 1) + 1$$

$$\text{et } P \wedge Q = 1$$

$$1 = x^2 + x + 1 + (x + 1)(-x)$$

$$= x^2 + x + 1 + (x + 1)(2 - (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1))$$

$$= 2(-x^6 + x^4 - x^3 + x + 1) + P(x^4 - x^2 + x)$$

Exercice IV :

24

soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 4 tel que
 $P(0) = P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(3) = 9$ et $P(4) = 16$

Calculer $P(-2)$

Corrigé :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4$$

$$P(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$P(1) = 1 \Rightarrow a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 0$$

$$P(2) = 4 \Rightarrow 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 3$$

$$P(3) = 9 \Rightarrow 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 8$$

$$P(4) = 16 \Rightarrow 256a_4 + 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 = 15$$

La solution de ce système est :

$$\begin{pmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} \\ -\frac{5}{12} \\ \frac{59}{24} \\ -\frac{25}{12} \end{pmatrix}$$

$$P(-2) = \frac{16}{24} + \frac{40}{12} + \frac{59}{24} \times 4 + \frac{25 \times 8}{12} + 1$$

$$P(-2) = 19$$

Exercice V

1) on considère un polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$

1.1) Montrer que j est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.

1.2) Décomposer P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

2) (facultatif) Décomposer en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ les polynômes suivants :

$$P_1 = X^6 + 64; \quad P_2 = X^4 - 2X^3 + 27X^2 - 2X + 26 \quad (\text{noter que } P_2(1) = 0),$$

$$P_3 = 2X^4 + 5X^3 + 13X^2 + 7X + 5 \quad (\text{calculer } P_3(-1+2i)).$$

Corrigé :

$$1) j^2 = -(j+1)$$

$$j^3 = 1$$

$$1.4) P(j) = j^8 + 2j^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1$$

$$= -j - 1 + 2 + 3j - 2j - 2 + 1$$

$$= 0$$

$$P'(j) = 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j$$

$$= 8j - 12j - 12j + 12j + 4j$$

$$= 0$$

$$P''(j) = 56j^6 + 60j^4 + 36j^2 + 4$$

$$= 56 + 60j - 76j - 76 + 4$$

$$= 24 + 24j \neq 0$$

donc j est une racine de multiplicité d'ordre 2.

1.2) Décomposition sur $\mathbb{C}$

j et $\bar{j}$ sont des racines de multiplicité d'ordre 2. P est paire et P' est impaire donc $-j$ et $-\bar{j}$ sont racines de multiplicité d'ordre 2.

$$\text{Donc } P = \alpha (X-j)^2 (X-\bar{j})^2 (X+j)^2 (X+\bar{j})^2$$

Comme le facteur dominant de P est égal à 1 donc $\alpha = 1$

$$P = (X-j)^2 (X-\bar{j})^2 (X+j)^2 (X+\bar{j})^2$$

Décomposition sur $\mathbb{R}$.

$$P = [(X-j)(X-\bar{j})]^2 [(X+j)(X+\bar{j})]^2$$

$$= [X^2 - (j+\bar{j})X + j\bar{j}]^2 [X^2 + (j+\bar{j})X + j\bar{j}]^2$$

$$= (X^2 - X + 1)^2 (X^2 + X + 1)^2$$

Exercice 6.

Trouver le polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $(X-1)^4$ divise $P+1$ et $(X+1)^4$ divise $P-1$.

Corrigé

$$(X^4-1)^4 / P+1 \Rightarrow \exists Q_1 \in \mathbb{R}_3[X] / P+1 = (X^4-1)^4 Q_1$$

$$(X^4+1)^4 / P-1 \Rightarrow \exists Q_2 \in \mathbb{R}_3[X] / P-1 = (X^4+1)^4 Q_2$$

$$P' = 4(X-1)^3 Q_1 + (X-1)^4 Q_1' = (X-1)^3 [4Q_1 + (X-1)Q_1']$$

$$P' = 4(X+1)^3 Q_2 + (X+1)^4 Q_2' = (X+1)^3 [4Q_2 + (X+1)Q_2']$$

$$(X+1)^3 / P' \text{ et } (X-1)^3 / P'$$

$$\text{et comme } (X+1) \wedge (X-1) = 1$$

$$\Rightarrow (X+1)^3 (X-1)^3 / P' \Rightarrow \deg(P') \geq 6$$

et comme $P \in \mathbb{R}_2(\mathbb{Z})$ along $\deg(P') = 6$

(26)

$$P'(X) = \alpha(X-1)^3(X+1)^3$$

$$= \alpha(X^2-1)^3$$

$$= \alpha(X^2-1)(X^4-2X^2+1)$$

$$= \alpha(X^6-3X^4+3X^2-1)$$

$$P(X) = \alpha\left(\frac{1}{3}X^3 - \frac{3}{5}X^5 + X^3 - X\right) + P$$

$$P(1) = -1 \Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) + P = -1$$

$$P(-1) = 1 \Rightarrow \alpha\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\right) + P = 1$$

$$P = 0, \alpha = \frac{35}{16}$$

$$P(X) = \frac{35}{16}\left(\frac{1}{3}X^3 + \frac{3}{5}X^5 + X^3 - X\right)$$

$$= \frac{5}{16}X^3 + \frac{21}{16}X^5 + \frac{35}{16}X^3 - \frac{35}{16}X$$

Exercice 8:

Décomposer en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes:

$$F_1 = \frac{11X^2 - 5X - 10}{5X^3 - 5X^2} \quad (\text{sur } \mathbb{R}) \quad ; F_2 = \frac{-2X^2 + 20X - 68}{(X+4)(X^2+4)} \quad (\text{sur } \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{C})$$

$$F_3 = \frac{5X^4 - 34X^3 + 70X^2 - 33X - 19}{(X-3)^2} \quad (\text{sur } \mathbb{R})$$

$$F_4 = \frac{-10X^4 + X^3 - 19X^2 + X - 10}{X^5 + 2X^3 + X} \quad (\text{sur } \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{C})$$

$$F_5 = \frac{1}{(X^4-1)^2} \quad (\text{sur } \mathbb{R}), \quad F_6(X) = \frac{4X^3}{X^4-1} \quad (\text{sur } \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{C})$$

Corrigé

$$\bullet F_1 = \frac{11X^2 - 5X - 10}{5X^3 - 5X^2} = \frac{11X^2 - 5X - 10}{5X^2(X-1)}$$

$$= \frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{C}{X-1}$$

$$B = X^2 F_1 \Big|_{X=0} = \frac{-10}{-5} = \frac{10}{5} = 2$$

(27)

$$C = (x-3)F_1 \Big|_{x=3} = \frac{11-5-10}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$xF_1 \text{ at } x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{11}{5} = A + C$$

$$A = \frac{11}{5} + \frac{4}{5} = 3$$

$$\text{so } F_1 = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{5(x-3)}$$

$$\bullet F_2 = \frac{-2x^2 + 20x - 68}{(x+4)(x^2+4)} = \frac{A}{x+4} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

for $\mathbb{R}$

$$A = (x+4)F_2 \Big|_{x=-4} = \frac{-32 - 80 - 68}{20} = \frac{-180}{20} = -9$$

$$2Bx + C = (x^2+4)F_2 \Big|_{x=2i} = \frac{8 + 40i - 68}{2i}$$

$$= \frac{20i - 30}{i+2} = \frac{(20i-30)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$= \frac{40i + 20 - 60 + 30i}{5}$$

$$= \frac{70i - 40}{5} = 14i - 8$$

$$B = 7, C = -8$$

$$F_2 = \frac{-9}{x+4} + \frac{7x-8}{x^2+4}$$

for $\mathbb{C}$:

$$\frac{7x-8}{x^2+4} = \frac{7x-8}{(x+2i)(x-2i)}$$

$$\bullet F_3 = \frac{5x^4 - 34x^3 + 70x^2 - 33x - 19}{(x-3)^2}$$

$$\begin{array}{r|l}
 5x^4 - 34x^3 + 70x^2 - 33x - 19 & x^2 - 6x + 9 \\
 -5x^4 + 30x^3 - 45x^2 & 5x^2 - 4x + 1 \\
 \hline
 -4x^3 + 25x^2 - 33x - 19 & \\
 +4x^3 - 24x^2 + 36x & \\
 \hline
 x^2 + 3x - 19 & \\
 -x^2 + 6x - 9 & \\
 \hline
 9x - 28 &
 \end{array}$$

(28)

$$F_3 = 5x^2 - 4x + 1 + \frac{9x - 28}{(x-3)^2}$$

$$F = \frac{9x - 28}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

$$B = F(x-3)^2 \Big|_{x=3} = -1$$

$$x=0 \Rightarrow \frac{-28}{9} = -\frac{A}{3} + \frac{-1}{9}$$

$$A = 9$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= 5x^2 - 4x + 1 + \frac{9x - 28}{(x-3)^2} \\
 &= 5x^2 - 4x + 1 + \frac{9}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^2}
 \end{aligned}$$

$$F_4 = \frac{-10x^4 + x^3 - 19x^2 + x - 10}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{-10x^4 + x^3 - 19x^2 + x - 10}{x(x^4 + 2x^2 + 1)}$$

$$\text{Ans PR: } F_4 = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$A = xF_4 \Big|_{x=0} = -10$$

$$Dx+E = (x^2+1)^2 F_4 \Big|_{x=i} = \frac{-10-i+19+i-10}{i} = \frac{-1}{i} = i$$

$$\boxed{D=1, E=0}$$

$$X F_4 \text{ et } X \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow -10 = A + B$$

$$B = 0$$

$$X=1 \Rightarrow \frac{-10 + 1 - 19 + 1 - 10}{4} = -10 \times \frac{1}{4} = -\frac{37}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{4 \times 9}{4}$$

$$\boxed{C = 1}$$

$$F_4 = \frac{-10}{X} + \frac{1}{X^2+1} + \frac{X}{(X^2+1)^2}$$

$$\text{sur } G : \text{param } F = \frac{1}{X^2+1} = \frac{1}{(X+i)(X-i)} = \frac{A}{X+i} + \frac{B}{X-i}$$

$$A = (X+i)F \Big|_{X=-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2}$$

$$B = (X-i)F \Big|_{X=i} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}$$

$$F = \frac{1}{2(X+i)} - \frac{1}{2(X-i)}$$

$$\text{Param } G = \frac{X}{(X^2+1)^2} = \frac{X}{(X^2+1)(X+i)} = \frac{X}{(X+i)^2(X-i)^2}$$

$$= \frac{A}{X+i} + \frac{B}{(X+i)^2} + \frac{C}{X-i} + \frac{D}{(X-i)^2}$$

$$(X+i)^2 G \Big|_{X=-i} = \frac{i}{(-2i)^2} = \frac{i}{4} = B$$

$$(X-i)^2 G \Big|_{X=i} = \frac{i}{(2i)^2} = -\frac{i}{4} = D$$

$$\text{comme } G \text{ est impaire} \Rightarrow \text{B} = G(X) = G(-X) \\ X=0$$

$$\frac{A}{i} - B - \frac{C}{i} - D = 0$$

$$\frac{A}{i} + \frac{i}{4} - \frac{i}{4} - \frac{C}{i} = 0$$

$$\boxed{A = C}$$

$$X = 1 \Rightarrow$$

(30)

$$\frac{1}{4} = \frac{A}{1+i} + \frac{i}{4(1+i)^2} + \frac{A}{1-i} + \frac{-i}{4(1-i)^2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{A(1-i) + A(1+i)}{2} + \frac{i}{4(1+i)^2} - \frac{i}{4(1-i)^2}$$

$$= A + \frac{1}{4} \Rightarrow A = 0$$