Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat, Maroc

Algèbre 2, 2016-2017
Filière : SMIA

Questions pour préparation à l'examen.

1. Rappeler la définition d'un groupe, d'un anneau et d'un corps.
2. Montrer que l'ensemble $\{\overline{0}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
3. Déterminer l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (voir Exercice 6 de la série 1).
4. Déterminer les sous-groupes $<\overline{2}>$ et $<\overline{3}>$ du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$.
5. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrer que f est injectif si et seulement si $Ker(f) = \{1_G\}$.
6. Montrer que tout groupe d'ordre 2 est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
7. Montrer que tout groupe abélien d'ordre 4 est ismorphe soit au groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ ou bien au groupe produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
8. ** Soit G un groupe cyclique engendré par un élément a d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que G est ismorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
(Indication : vous pouvez considérer $f : G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $f(a^k) = \overline{k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et appliquer le résultat (admis) suivant :
Soit x un élément d'ordre fini n d'un groupe H. Alors, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x^k = 1 \Leftrightarrow n$ divise k.)
9. ** Montrer que tout groupe d'ordre un nombre premier p est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
(Indication : vous pouvez utiliser le résultat (admis) suivant : (Théorème de Lagrange) Pour tout groupe fini G d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, l'ordre de tout sous-groupe de G divise n).
10. Donner un exemple d'un sous-groupe du groupe symétrique S_3 d'ordre 3.
11. Déterminer le sous-groupe du groupe symétrique S_5 engendré par les deux transpositions $\tau_{2;5}$ et $\tau_{1;3}$. Rappelons que deux cycles de supports disjoints commutent.
12. Soit σ un cycle du groupe symétrique S_n (où $n \geq 2$) de support $\{x_1, ..., x_m\}$ (où $2 \leq m \leq n$). Montrer que, pour toute permutation f de S_n, la permutation $f\sigma f^{-1}$ et le cycle $\{f(x_1), ..., f(x_m)\}$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(f\sigma f^{-1})^k = f\sigma^k f^{-1}$. En déduire le sous-groupe de S_n engendré par $f\sigma f^{-1}$.
13. Montrer que $\mathbb{Z}$ n'admet pas de sous-anneaux autre que $\mathbb{Z}$ lui même.

---

1. Vous pouvez utiliser le théorème (admis) suivant : Soit a un élément d'un groupe G. S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k = 1$, alors a est d'ordre fini n avec $n = \min\{k \in \mathbb{N}^* | a^k = 1\}$ et $< a >= \{1, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$.
Rappelons que nous adoptons la notation multiplicative. Vous pouvez reformuler ce résultat en utilisant la notation additive pour pouvoir l'utiliser facilement dans les cas des groupes additifs tels que les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

14. Rappeler la somme de deux idéaux d'un anneau commutatif A et montrer que c'est un idéal de A.

15. Déteminer $8\mathbb{Z}+6\mathbb{Z}$, $8\mathbb{Z}\cap 6\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}+9\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}\cap 9\mathbb{Z}$.

16. Montrer que si x est un élément inversible d'un anneau commutatif A, alors pour tout $a \in A$, $< a >=< xa >$.

17. Montrer que si un idéal I d'un anneau commutatif A contient un élément inversible, alors $I = A$..En déduire, l'ensemble des idéaux d'un corps.

18. Déterminer l'idéal principapl de $\mathbb{Z}$ engendré par 2, l'idéal principapl de $\mathbb{R}$ engendré par $\sqrt{2}$, et le sous-groupe monogène de $(\mathbb{R},+)$ engendré par 2.

19. Justifier pourquoi l'image directe d'un idéal n'est pas en général un idéal.

20. Donner un exemple d'un endomorphisme du groupe additif $\mathbb{Z}$ qui n'est pas un homomorphisme d'anneaux.

21. Montrer que tout corps est un anneau intègre. Que peut-on dire de la réciproque ?

22. Montrer que tout élément inversible dans un anneau est régulier. Que peut-on dire de la réciproque ?

23. Rappeler le noyau d'un homomorphisme d'anneaux et montrer que c'est un idéal. En déduire, que si K est un corps, alors tout homomorphisme d'anneaux $f : K \to A$ (où A est un anneau) est nul ou injectif.

24. Soit A un anneau commutatif non nul. Laquelle des assertions suivantes est fausse (justifier votre réponse) : (1) $\{0\}$ est un idéal de A. (2) $\{0\}$ est un sous-anneau de A. (3) $\{0\}$ est un anneau.

25. Rappeler la caractéristique d'un anneau commutatif et montrer que si m, la caractéristique d'un anneau intègre A, n'est pas nulle alors m est un nombre premier.

26. Laquelle des assertions suivantes est vraie : (1) Le polynôme X^4+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. (2) Le polynôme X^4+1 est irréductible dans $\mathbb{C}[X]$. (3) Le polynôme X^4+1 est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

27. Laquelle des assertions suivantes est vraie : (1) Le polynôme X^4-1 est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. (2) Le polynôme X^4-1 est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

28. Montrer que si un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ admet une racine $a \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$, alors $deg(P) \geq 2$.

29. Determiner le polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ ayant les racines $\{0;2;4;8\}$.

30. Etudier la véracité de la proposition suivante : Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Le PGCD de P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ est le même que celui obtenu si on considère que les polynômes P et Q sont dans $\mathbb{C}[X]$.

31. Rappeler la définition de la multiplicité d'une racine a d'un polynôme P et en donner sa caractérisation en utilisant la notion de polynôme dérivé.

32. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Laquelle des assertions suivantes est vraie : (1) Si $P^{(3)}(a)=0$ alors $(X-a)^3$ divise P. (2) Si $(X-a)^3$ divise P alors $P^{(3)}(a)=0$. (3) Si $P^{(3)}(a)\neq 0$ alors $(X-a)^3$ ne divise pas P.

33. Déterminer l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau de polynômes $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K}$ est un corps. (justifier votre réponse)

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat, Maroc

Algèbre 2, 2015-2016
Filière : SMIA

Questions pour préparation à l'examen.

1. Rappeler la définition d'un Groupe.
2. Rappeler la définition d'un anneau.
3. Rappeler la définition d'un corps.
4. Rappeler la définition d'un sous-anneau et donner sa caractérisation.
5. Montrer que $\mathbb{Z}$ n'admet pas de sous-anneaux autre que $\mathbb{Z}$ lui même.
6. Rappeler la définition d'un idéal et donner sa caractérisation.
7. Rappeler la définition d'un sous-groupe et donner sa caractérisation.
8. Rappeler la définition d'un homomorphisme de groupes et d'un homomorphisme d'anneaux.
9. Donner un exemple d'un endomorphisme du groupe additif $\mathbb{Z}$ qui n'est pas un homomorphisme d'anneaux.
10. Rappeler la définition d'un anneau produit de deux anneaux.
11. Rappeler la somme de deux idéaux d'un anneau commutatif A et montrer que c'est un idéal de A.
12. Rappeler la définition d'un idéal principal d'un anneau commutatif A.
13. Montrer que si x est un élément inversible d'un anneau commutatif A, alors pour tout $a \in A$, $< a > = < xa >$.
14. Rappeler la définition d'un groupe monogène et d'un groupe cyclique.
15. Montrer que tout corps est un anneau intègre. Que peut-on dire de la réciproque ?
16. Montrer que tout élément inversible dans un anneau est régulier. Que peut-on dire de la réciproque ?
17. Rappeler le noyau d'un homomorphisme d'anneaux et montrer que c'est un idéal.
18. Donner un exemple d'un idéal contenant un élément qui n'est pas régulier.
19. Soit A un anneau commutatif non nul. Laquelle des assertions suivantes est fausse (justifier ta réponse) :
    (a) $\{0\}$ est un idéal de A.
    (b) $\{0\}$ est un sous-anneau de A.
    (c) $\{0\}$ est un anneau.
20. Donner un exemple d'un idéal contenant un élément inversible.
21. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes, et soit e l'élément neutre de G. Montrer que f est injectif si et seulement si $ker(f) = \{e\}$.

22. Rappeler la caractéristique d'un anneau commutatif et montrer que si m, la caractéristique d'un anneau intègre A, n'est pas nulle alors m est un nombre premier.

23. Donner un exemple d'un anneau non intègre.

24. Donner un exemple d'un anneau contenant un corps sans qu'il soit un corps.

25. Donner un exemple d'un anneau contenant un sous-groupe additif qui n'est pas stable pour la multiplication.

26. Soient A et B deux anneaux. Déterminer l'homomorphisme d'anneaux $f : A \to B$ vérifiant $Ker(f) = A$.

27. Rappeler la définition de deux polynômes associés et donner la caractérisation de cette notion par les idéaux.

28. Déterminer l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau de polynômes $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K}$ est un corps.

29. Rappeler la définition d'un polynôme irréductible et en donner un exemple.

30. Rappeler la définition du PGCD de deux polynômes non nuls.

31. Rappeler le théorème de Bézout dans l'anneau de polynômes.

32. Justifier pourquoi un polynôme qui a plus de racines que son degré est nul.

33. Rappeler la formule de Taylor dans un anneau de polynômes.

34. Rappeler la définition de la multiplicité d'une racine a d'un polynôme P et en donner sa caractérisation en utilisant la notion de polynôme dérivé.

35. Laquelle des assertions suivantes est vraie :
    (a) Le polynôme $X^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
    (b) Le polynôme $X^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.
    (c) Le polynôme $X^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

36. Laquelle des assertions suivantes est vraie :
    (a) Le polynôme $X^4 - 1$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
    (b) Le polynôme $X^4 - 1$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

37. Montrer que si un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ admet une racine $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, alors $deg(P) \geq 2$.

38. Determiner le polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ ayant les racines $\{0; 2; 4; 8\}$.

39. Etudier la véracité de la proposition suivante : Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Le PGCD de P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ est le même que celui obtenu si on considère que les polynômes P et Q sont dans $\mathbb{C}[X]$.