Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat, Maroc

Filière : SMIA
Semestre 1
2017-2018

Examen (1h30min)
(Algèbre II)

Questions de cours.

1. Rappeler la définition d'un anneau.
2. Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes.
   2.1. Montrer que $Ker(f)$ est un sous-groupe de G (on rappelle $Ker(f) = \{x \in G | f(x) = 1_H\}$).
   2.2. Montrer que f est injectif si et seulement si $Ker(f) = \{1_G\}$.
3. **3.1.** Montrer que si un idéal I d'un anneau commutatif A contient un élément inversible, alors $I = A$.
   3.2. En déduire l'ensemble des idéaux d'un corps K.

Exercice 1.
Soient A_1 et A_2 deux anneaux. On considère $A_1 \times A_2$ muni des deux lois suivantes : $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ et $(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$ (pour tous (a_1, a_2) et (b_1, b_2) dans $A_1 \times A_2$).

1. Montrer que $(A_1 \times A_2, +, \star)$ est un anneau. (On ne demande pas de démontrer que $(A_1 \times A_2, +)$ est un groupe commutatif)
2. Montrer que $A_1 \times A_2$ est commutatif si et seulement si A_1 et A_2 sont commutatifs.
3. **3.1.** Montrer que la partie $A_1 \times \{0\}$ de $A_1 \times A_2$ est stable pour les deux lois de $A_1 \times A_2$.
   3.2. Est-elle un sous-anneau de $A_1 \times A_2$?

Exercice 2.
On considère un groupe $(H, \times)$ d'ordre 3.
On pose $H = \{e, x, y\}$, où e est l'élément neutre de H.

1. Montrer que $x = y^{-1}$ et $y = x^2$.
2. En déduire que H est cyclique.

Exercice 3.
Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $P = (X sin(a) + cos(a))^n$ par $Q = X^2 + 1$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$).