Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat, Maroc

Filière : SMIA
Semestre 1
2016-2017

Examen (1h30min)
(Structures, Polynômes et Fractions Rationnelles)

Questions de cours.

1. Déterminer le sous-groupe $<\overline{2}>$ du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$.
2. Donner un exemple d'un élément du groupe symétrique S_3 d'ordre 3.

Exercice 1.

1. (a) Décomposer $P = X^4 + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Le polynôme $X^4 + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Justifier votre réponse.
2. Déteminer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 3$ par le polynôme $(X-2)^2$.
3. Décomposer $F = \dfrac{2X^2 - X + 1}{(X-1)(X^2-1)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Soient A et B deux anneaux et $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux surjectif. Soit $a \in A$. On rappelle que $< a >$ désigne l'idéal principal de A engendré par a.
   (a) Montrer que $f(< a >)$ est un idéal de B.
   (b) Montrer que $f(< a >)$ contient $f(a)$ et en déduire que $< f(a) > \subset f(< a >)$.
   (c) Montrer que $f(< a >) =< f(a) >$.
2. On considère l'application surjectif $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) définie par $\pi(k) = \overline{k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que π est un homomorphisme d'anneaux.
   (b) Montrer que $Ker(\pi) = n\mathbb{Z}$.
   (c) Soit I un idéal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\pi^{-1}(I) = m\mathbb{Z}$. Vérifier que m divise n.
   (d) Déduire que tout idéal I de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est principal.
3. Déterminer l'ensemble des idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.