Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat, Maroc

Filière : SMIA
Semestre 1
2014-2015

Examen (1h30min)
(Structures, Polynômes et Fractions Rationnelles)

Questions de cours.

1. Rappeler la définition d'un groupe monogène et d'un groupe cyclique.
2. Rappeler la définition d'un idéal et donner sa caractérisation.
3. Justifier pourquoi on ne peut pas identifier, en général, un polynôme P avec la fonction polynômiale $\tilde{P}$ associée à P.

Exercice 1

Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier.
On note $\mathbb{Z}_p := \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N}^*$ *et* p *ne divise pas* $b\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que, pour tout élément $x \in \mathbb{Q}^*$, on a soit $x \in \mathbb{Z}_p$, soit $x^{-1} \in \mathbb{Z}_p$.
3. Montrer que $U_p = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}^*; b \in \mathbb{N}^*$ *et* p *ne divise ni* a *ni* $b\}$ où U_p désigne l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}_p$.
4. Montrer que $J_p := \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N}^*; p$ *divise* a *et* p *ne divise pas* $b\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}_p$ qui est principal engendré par p.
5. Montrer que tout idéal propre de $\mathbb{Z}_p$ (i.e. différent de $\mathbb{Z}_p$) est inclus dans J_p. (Indication : vous pouvez utiliser le fait qu'un idéal contenant un élément inversible coïncide avec l'anneau)

Exercice 2

On considère les polynômes $A = X^n + X + 1$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) et $B = (X-1)^2$. On pose Q et R, respectivement, le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.

1. Exprimer le polynôme dérivé R' en fonction de A, B et Q.
2. Exprimer $R'(1)$ en fonction de n.
3. Déduire que $R = (n+1)X + (2-n)$.

Exercice 3

Décomposer $F = \dfrac{2}{(X^2-1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.