

**Examen (session de rattrapage) (1h30min)**  
**(Structures, Polynômes et Fractions Rationnelles)**

**Questions de cours.**

1. Rappeler la définition d'un corps.
2. Justifier pourquoi l'image directe d'un idéal par un homomorphisme d'anneaux n'est pas en général un idéal.
3. Soient  $K$  un corps et  $A$  un anneau. Montrer que tout homomorphisme non nul d'anneaux  $f : K \rightarrow A$  est injectif.

**Exercice 1**

On pose  $A = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } b > 0 \text{ est un entier impair} \right\}$

1. Montrer que  $A$  est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$ .
2. Montrer que, pour tout élément  $x \in \mathbb{Q}^*$ , on a soit  $x \in A$ , soit  $x^{-1} \in A$ .
3. On pose  $V = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N}^* \text{ avec } a \text{ et } b \text{ sont des entiers impairs} \right\}$ .  
Montrer que  $V$  est l'ensemble des éléments inversibles de  $A$ .
4. On pose  $J = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N}^*; a \text{ pair et } b > 0 \text{ est un entier impair} \right\}$ .  
Montrer que  $J$  est un idéal principal de  $A$ .
5. Soit  $H$  un idéal propre de  $A$  (i.e., différent de  $A$ ). Montrer  $H \subset J$ .

**Exercice 2**

1. Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  le polynôme  $(X+1)^7 - X^7 - a$  admet-il une racine multiple réelle ?
2. Décomposer la fraction rationnelle  $F(X) = \frac{4X^3}{X^4-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .