

Examen (session de rattrapage) (1h30min)  
(Structures, Polynômes et Fractions Rationnelles)

Questions de cours.

1. Rappeler la définition d'un corps.
2. Justifier pourquoi l'image directe d'un idéal par un homomorphisme d'anneaux n'est pas en général un idéal.
3. Soient  $K$  un corps et  $A$  un anneau. Montrer que tout homomorphisme non nul d'anneaux  $f : K \rightarrow A$  est injectif.

Exercice 1

On pose  $A = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } b > 0 \text{ est un entier impair} \right\}$ .

1. Montrer que  $A$  est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$ .
2. Montrer que, pour tout élément  $x \in \mathbb{Q}^*$ , on a soit  $x \in A$ , soit  $x^{-1} \in A$ .
3. On pose  $V = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N}^* \text{ avec } a \text{ et } b \text{ sont des entiers impairs} \right\}$ .  
Montrer que  $V$  est l'ensemble des éléments inversibles de  $A$ .
4. On pose  $J = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N}^*; a \text{ pair et } b > 0 \text{ est un entier impair} \right\}$ .  
Montrer que  $J$  est un idéal principal de  $A$ .
5. Soit  $H$  un idéal propre de  $A$  (i.e., différent de  $A$ ). Montrer  $H \subset J$ .

Exercice 2

1. Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  le polynôme  $(X+1)^7 - X^7 - a$  admet-il une racine multiple réelle?
2. Décomposer la fraction rationnelle  $F(X) = \frac{4X^3}{X^4-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .