Corrigé de l'examen de Rattrapage du Module Algèbre 1

Exercice. Donner, en justifiant, un exemple de deux applications f et g de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telles que :

f est injective non surjective.

g est surjective non injective.

Corrigé de l'exercice.

► Posons $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, définie par $f(n) = n + 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Montrons que f est injective.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(m)$. Alors $n + 1 = m + 1$. Donc $n = m$. D'où l'injectivité de f.

Montrons que f n'est pas surjective. On prend $n = 0$. Alors 0 n'a pas d'antécédent car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $f(n) = n + 1 = 0$.

► Posons $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, définie par $g(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) = n - 1$.

Montrons que g est surjective.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $g(n + 1) = (n + 1) - 1 = n$. Donc n admet $n + 1$ comme antécédent.

Montrons que g n'est pas injective, en effet, $g(1) = 0 = g(0)$. Donc 0 a au moins deux antécédents. Il en résulte que g n'est pas injective.

Problème 1. Dans ce problème, E et F désignent deux ensembles et $h : E \to F$ une application de E dans F.

1 - Soient A et B deux parties de E.

1.1. Montrer que $A \subset B \Rightarrow h(A) \subset h(B)$.

1.2. Donner un exemple où la réciproque de l'implication dans 1.1 est fausse.

1.3. Montrer que si h est injective, alors $h(A) \subset h(B) \Rightarrow A \subset B$.

2 - Soient C et D deux parties de F.

2.1. Montrer que $C \subset D \Rightarrow h^{-1}(C) \subset h^{-1}(D)$.

2.2. On suppose que h est surjective, montrer que $h^{-1}(C) \subset h^{-1}(D) \Rightarrow C \subset D$.

(Rappel : Soit $Y \subset F$, alors $\forall x \in E$ on a : $x \in h^{-1}(Y) \Leftrightarrow h(x) \in Y$).

Corrigé du problème I.

1.1. Supposons que $A \subset B$, soit $y \in h(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = h(x)$. Comme $A \subset B$, alors $x \in B$. Donc $y = h(x) \in h(B)$.

On a montré que $\forall y \in h(A)$, $y \in h(B)$. Donc $h(A) \subset h(B)$.

1.2. Exemple : Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Posons $A = \{1, -1\}$ et $B = \{0, 1\}$, alors on a $h(A) = \{1\}$ et $h(B) = \{0, 1\}$. Donc $h(A) \subset h(B)$, mais $A \not\subset B$.

1.3. Supposons que h est injective. Soient $A, B \subset E$ tels que $h(A) \subset h(B)$. Montrons que $A \subset B$.

Soit $x \in A$, on a $h(x) \in h(A)$, or par hypothèse $h(A) \subset h(B)$, donc $h(x) \in h(B)$. Par suite, il existe $z \in B$, tel que $h(x) = h(z)$. Or h est injective, donc $x = z$. Comme $z \in B$, il en résulte que $x \in B$. D'où $A \subset B$.

2.1. Supposons que $C \subset D$. Soit $x \in h^{-1}(C)$, alors $h(x) \in C$, comme $C \subset D$, on a $h(x) \in D$. Par conséquent $x \in h^{-1}(D)$. D'où $h^{-1}(C) \subset h^{-1}(D)$.

2.2. Supposons que h est surjective et que $h^{-1}(C) \subset h^{-1}(D)$. Soit $y \in C$, comme h est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = h(x)$. On a $x \in h^{-1}(C)$. Comme $h^{-1}(C) \subset h^{-1}(D)$, on a $x \in h^{-1}(D)$. D'où $y = h(x) \in D$. Par conséquent $C \subset D$.

Attention ! : l'écriture $x = h^{-1}(y)$ est incorrecte, car h n'est pas nécessairement bijective. Dire que $x \in h^{-1}(D)$ cela signifie simplement que $h(x) \in D$ comme il a été indiqué dans le rappel.

Problème 2.

1 - Déterminer l'ordre multiplicatif de 3 modulo 10.

2 - Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de 3^n par 10.

3 - Montrer que 2 est un élément primitif modulo 11.

4 - En utilisant les résultats précédents, déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de 2^{3^n} par 11.

5 - Montrer que $2^{3^{2018}} + 5$ est divisible par 11.

Corrigé du problème II.

1. Le calcul des puissances de 3 modulo 10 donne : $3^0 \equiv 1, 3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 9, 3^3 \equiv 7, 3^{\boxed{4}} \equiv \boxed{1}$.

Donc l'ordre multiplicatif de 3 modulo 10 est égal à 4.

2. D'après la question 1, on a :

Si $n \equiv 0$ modulo 4, alors $3^n = 3^{4k} = (3^4)^k \equiv 1$ modulo 11.

Si $n \equiv 1$ modulo 4, alors $3^n = 3^{4k+1} = (3^4)^k \times 3 \equiv 3$ modulo 10.

Si $n \equiv 2$ modulo 4, alors $3^n = 3^{4k+2} = (3^4)^k \times 9 \equiv 9$ modulo 10.

Si $n \equiv 3$ modulo 4, alors $3^n = 3^{4k+3} = (3^4)^k \times 7 \equiv 7$ modulo 10.

3. Modulo 11 on a : $2^0 \equiv 1, 2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 8, 2^4 \equiv 5, 2^5 \equiv 10$.

Notons $o(2)$, l'ordre multiplicatif de 2 modulo 11, alors $o(2) > 5$. Or $o(2) \mid 11 - 1 = 10$, donc $o(2) = 10$. Par suite, 2 est un élément primitif modulo 11.

4. D'après les résultats précédents, on a :

- Si $n \equiv 0$ modulo 4, $3^n = 3^{4k} = (3^4)^k \equiv 1$ modulo 10. Donc $2^{3^n} \equiv 2^{10q+1} \equiv 2$ modulo 11.
- Si $n \equiv 1$ modulo 4, $3^n = 3^{4k+1} = (3^4)^k \times 3 \equiv 3$ modulo 10. Donc $2^{3^n} \equiv 2^{10q+3} \equiv 2^3 \equiv 8$ modulo 11.
- Si $n \equiv 2$ modulo 4, $3^n = 3^{4k+2} = (3^4)^k \times 9 \equiv 9$ modulo 10. Donc $2^{3^n} \equiv 2^{10q+9} \equiv 2^9 \equiv 6$ modulo 11.
- Si $n \equiv 3$ modulo 4, $3^n = 3^{4k+3} = (3^4)^k \times 27 \equiv 7$ modulo 10. Donc $2^{3^n} \equiv 2^{10q+7} \equiv 2^7 \equiv 7$ modulo 11.

5. On a $n = 2018 = (504 \times 4) + 2$, donc $n \equiv 2$ modulo 4. Alors on a , $2^{3^{2018}} \equiv 6$ modulo 11, par conséquent, $2^{3^{2018}} + 5 \equiv 6 + 5 \equiv 0$ modulo 11. C'est à dire $11 \mid 2^{3^{2018}} + 5$

Barême :

Exercice : (2pts)

Pb1 : Question 1.1(1pt), Q1.2(1pt), Q1.3(2pts), Q2.1(2pts), Q2.2(2pts)

Pb2 : Q1(2pts), Q2(2pts), Q3(2pts), Q4(2pts), Q5(2pts)