Corrigé du concours d'accès en 1ére année des ENSA Maroc – Juillet 2018 effectué par Mr.EL ABBASSI Mohammed professeur de Mathématiques au lycée Ibn abdoun – Khouribga
Le 19/07/2018

Question 1

Cet exercice est une application d'un théorème dit théorème de Césaro :

Théorème

Si (u_n) est une suite réelle tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \in R$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1+u_2+...+u_n}{n} = l$.

Si on connait d'avance ce théorème on peut répondre à la question très rapidement en choisissant le D) comme réponse correcte.

En effet, considérons à la place de u_n le terme $u_n - u_{n-1}$ et ceci pour tout $n \in N^*$, comme on a $\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1}) = 2$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+...+(u_n-u_{n-1})}{n} = 2$ c.à.d $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n-u_0}{n} = 2$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} - \frac{u_0}{n} = 2$ et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_0}{n} = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 2$.

Mais, un élève du lycée ne connait pas ce théorème, et pourtant s'il est malin, il peut quand même répondre à la question, en prenant un cas très particulier d'une suite arithmétique de raison 2 c.à.d tel que $(\forall n \in N)\ u_{n+1} - u_n = 2$, on voit bien qu'on a :

$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 2$ et en même temps $(\forall n \in N)\ u_n = u_0 + 2n$ et par suite on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_0+2n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_0}{n} + 2 = 2.$$

Question 2

On a $(\forall n \in N^*)\ \left|\frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}\right| = \frac{|\sin^2 n - \cos^3 n|}{n} \leq \frac{2}{n}$ $\quad$ $(\textit{en appliquant l'inégalité triangulaire})$

Et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n} = 0$, donc la bonne réponse est le A).

On peut procéder autrement, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos^3 n}{n} = 0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2 n}{n} - \frac{\cos^3 n}{n} = 0.$$

Question 3

On a $\lim_{x\to1^+} \ln x . \ln(\ln x) = \lim_{t\to0^+} t \ln t = 0$ $\quad$ $(\textit{en posant } t = \ln x)$

D'où la bonne réponse est le B).

Question 4

On a : $\left(\forall n \in N^*\right)\ u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et comme $\left(\forall k \in \{n+1, n+2, ..., 2n\}\right) : \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ alors on a :
$\left(\forall n \in N^*\right)\ u_{2n} - u_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ d'où la bonne réponse est le A) .

Question 5

On a d'après la question 4 : $\left(\forall k \in N^*\right)\ u_{2^k} = u_{2.2^{k-1}} \geq \frac{1}{2} + u_{2^{k-1}}$ et donc en appliquant ce résultat on peut démontrer, aisément, par récurrence que $\left(\forall n \in N^*\right) u_{2^n} \geq \frac{n-1}{2} + u_2$ et comme $u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ alors $\left(\forall n \in N^*\right) u_{2^n} \geq \frac{n-1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{n+2}{2}$.

On en déduit que : $u_{2^{10}} \geq \frac{10+2}{2} = 6$. D'où la bonne réponse c'est le A) .

On pourrait procéder autrement : on a :

$$u_{2^{10}} = u_{2.2^9} \geq \frac{1}{2} + u_{2^{10-1}} = \frac{1}{2} + u_{2.2^8} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + u_{2^8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + u_{2^{10-2}} \geq ... \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + u_{2^{10-9}} = 6$$

Question 6

On a $\left(\forall x \in N\right) \cos^2\left(Arc\tan x\right) = \frac{1}{1 + \tan^2\left(Arc\tan x\right)} = \frac{1}{1+x^2}$ et donc $\cos\left(Arc\tan x\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Et comme $\left(\forall x \in R\right)\ Arc\tan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on sait que $\left(\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \cos t \rangle 0$ alors $\left(\forall x \in R\right) \cos\left(Arc\tan x\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. D'où la bonne réponse est le B) .

On peut déduire le résultat autrement : Comme chacune des deux fonctions $Arc\tan$ et $\cos$ sont définies sur l'ensemble R tout entier alors les réponses candidates sont B) ou C) et comme $\left(\forall x \in R\right)\ Arc\tan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left(\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \cos t \rangle 0$ alors la bonne réponse est B) .

Question 7

On peut montrer, aisément, par récurrence sur n que $\left(\forall x \in R\right)\left(\forall n \in N\right)\ f\left(x\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

En fixant le x et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :
$\lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(0\right)$ (*en utilisant le fait que* $\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ *et le fait que* f *est continue en* 0) .

D'où $\left(\forall x \in R\right)\ f\left(x\right) = f\left(0\right) = cste$. D'où la bonne réponse est le A) .

Question 8

On a :

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(a)(x-a)}{x-a}-a\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f(a)-af'(a).$$

D'où la bonne réponse est le D) .

Question 9

On a : $\int_0^1\frac{x^4}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^2-1+\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x+Arc\tan x\right]_0^1=-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}$.

D'où la bonne réponse est le C) .

Question 10

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}x^2\ln\left(x^2+1\right)dx&=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}x^3\right)'\ln\left(x^2+1\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{3}x^3\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{3}x^3\frac{2x}{1+x^4}dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^4}{1+x^2}dx\\&=\sqrt{3}\ln(4)-\left[\frac{1}{3}x^3-x+Arc\tan x\right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\ln(2)-\frac{2}{3}.\frac{\pi}{3}=2\left(\sqrt{3}\ln 2-\frac{\pi}{9}\right)\end{aligned}$$

D'où la bonne réponse est le C) .

($\textit{On rappelle que } Arc\tan 1=\frac{\pi}{4}\ \textit{ et }\ Arc\tan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$)

Question 11

$\textit{Dans le repère}\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)\ \textit{on a}: F(1,0,1)\ \textit{et}\ D(0,1,0),\ \textit{d'où}\ \overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$.

D'où la bonne réponse est C) .

Question 12

La droite (FD) passe par le point $D(0,1,0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$

Donc $(FD)\begin{cases}x=-t\\y=1+t\quad(t\in R)\\z=-t\end{cases}$. D'où la bonne réponse est le C) .

Pour la suite de l'exercice, on a :

$$I\left(\frac{1}{2},0,0\right),\ J\left(0,\frac{1}{2},1\right),\ K\left(1,\frac{1}{2},0\right)\ \text{ et }\ \overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\ \overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\ \overrightarrow{JK}(1,0,-1)$$

Question 13

On sait que le vecteur

$\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ *est orthogonale au plan* (IJK) *et comme* $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1) = 2\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$ *alors le vecteur* $\overrightarrow{FD}$ *est orthogonale au plan* (IJK).

D'où la bonne réponse est le A) .

Question 14

Comme $-\overrightarrow{FD}(1,-1,1)$ *est normal au plan* (IJK) *alors* $(IJK): x - y + z + d = 0$ et comme $I\left(\frac{1}{2},0,0\right) \in (IJK)$ alors $d = -\frac{1}{2}$ d'où $(IJK): x - y + z - \frac{1}{2} = 0$. D'où la bonne réponse est le B) .

Question 15

Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ *est le milieu du segment* $[FD]$, *donc il appartient à la droite* (FD) et comme ses coordonnées vérifient l'équation de (IJK) alors il appartient au plan (IJK) et comme $(FD) \perp (IJK)$ alors ce point est bien leur point d'intersection .

D'où la bonne réponse est le A) .

Question 16

On a $IK^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{2}$, $IJ^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{3}{2}$ et $JK^2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$

et on remarque que $IK^2 + IJ^2 = JK^2$, d'où le triangle IJK est rectangle en I .

D'où la bonne réponse est le D) .

Exercice 2

Question 17

Chaque grille-réponses possible est composée de 20 questions et pour chaque question On a 4 choix possibles, donc d'après le principe du produit il y a 4^{20} grilles possibles .

D'où la bonne réponse est le D) .

Question 18

Si on désigne par Ω l'univers des éventualités de cette expérience aléatoire alors on a $card\Omega = 4^{20}$.

On a : $P(A_0) = \frac{card(A_0)}{card(\Omega)} = \frac{3^{20}}{4^{20}}$, car pour chaque réponse fausse il y a 3 choix possibles .

D'où la bonne réponse est le A) .

Question 19

Désignons par X la variable aléatoire qui est égale au nombre de réponses correctes. Cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $20 \; et \; p=\frac{1}{4}$.(pour chaque question la probabilité de choisir la bonne réponse est $\frac{1}{4}$) .

On a $P(A_n)=P(X=n)=C_{20}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{20-n}=\binom{20}{n}\frac{1}{4^n}\left(\frac{3}{4}\right)^{20-n}=\binom{20}{n}\frac{3^{20-n}}{4^{20}}$.

D'où la bonne réponse est le B) .

Question 20

La probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement est égale à

$$P(X\geq 6)=\sum_{n=6}^{20}P(X=n)=\sum_{n=6}^{20}\frac{\binom{20}{n}3^{20-n}}{4^{20}} .$$

D'où la bonne réponse est le A) .

End

J'espère avoir été bien clair.

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue

elabbassimed2014@gmail.com