Correction du Concours d'entrée en 1ère année du cycle préparatoire
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées

Correction mathématique

Q1 : réponse C

on a :

$$t = re^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |t| = r \\ \arg(t) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = r \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} AC = rAB \\ \left(\overline{AB};\overline{AC}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

Q2. Réponse D.

A, B, C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

si et seulement si $t \in \mathbb{R}$

Q3.Réponse A.

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

si et seulement si $t \in i\mathbb{R}$

Exercice 2 :

Q4. Réponse B.

Le nombre de parties de E est : $2^{card(E)} = 2^n$

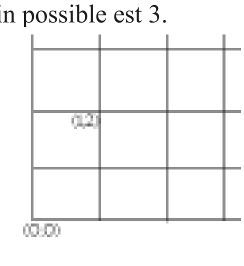
Q5. Réponse C.

Une parties de E qui contiennent un et un seul élément de A est la réunion d'un singleton de A et d'une partie de $E \setminus A$.

On a p façon pour choisir un élément de A et $2^{n\ p}$ pour choisir une partie de $E \setminus A$ (car $card(E \setminus A) = n - p$) , ainsi le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A est $p2^{n\ p}$.

Q6. Réponse A.

On peut vérifier que pour le cas particulier $p = 1$ et $q = 2$, le nombre de chemin possible est 3.



Or $C_{1+2}^{2}=3$; $2C_{1+2}^{2}=6$; $C_{1\times 2}^{2}=1$ *et* $2^{1+2}=8$, alors la réponse est A.

Q7. Réponse C.

On a $\forall x\in\mathbb{R}^{*};\ f(x)=\dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+x}$, alors $f(2)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, or $2\neq\dfrac{1}{2}$ alors $2\neq\dfrac{1}{2}$ alors f n'est pas injective. (de même pour n'importe réel non nul α on a $f(\alpha)=f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$)

Surjectivité de f : pour tous réels x et y, on a : $f(x)=y\Leftrightarrow yx^{2}-2x+y=0$

Le discriminant de l'équation $x\in\mathbb{R};yx^{2}-2x+y=0$ est $\Delta=4\left(1-y^{2}\right)$, ainsi f n'est pas surjective (il suffit de prendre $y\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

La réponse est donc C.

Q8. Réponse A.

On a :

$$\begin{aligned}15! &= 15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\\ &= 2^{11}\times3^{6}\times5^{3}\times7^{2}\times11\times13\end{aligned}$$

Donc le nombre de diviseurs de 15! est $12\times7\times3\times4\times2\times2=4032$.

Q9.Réponse A.

Pour chaque question on choisie une réponse unique, donc le nombre de grilles possibles est $\left(C_{4}^{1}\right)^{20}=4^{20}$

Q10.Réponse A.

On a $\alpha\geq0$ car $\forall t\in\left[0;1\right],1-t\in\left[0;1\right]$. d'autre part, pour $x=0$ et y quelconque $x\left(1-y\right)=0$.

Ainsi $\alpha=0$.

Q11.Réponse A.

On a :

$$\sum_{k=0}^{2016} (-1)^k C_{2016}^k = \sum_{k=0}^{2016} C_{2016}^k (-1)^k 1^{2016-k}$$
$$= (-1+1)^{2016}$$
$$= 0$$

Q12. Réponse D.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le 10}\sum_{1\le j\le 10} (i+j)^2 &= \sum_{1\le i\le 10}\sum_{1\le j\le 10} \left(i^2+2ij+j^2\right) \\
&= \sum_{1\le i\le 10} \left(\sum_{j=1}^{10} i^2 + 2i\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{j=1}^{10} j^2\right) \\
&= \sum_{1\le i\le 10} \left(10i^2 + 2i\frac{10\times 11}{2} + \frac{10\times 11\times 21}{6}\right) \\
&= 10\sum_{1\le i\le 10} i^2 + 110\sum_{1\le i\le 10} i + \sum_{1\le i\le 10} 385 \\
&= 10\times\frac{10\times 11\times 21}{6} + 110\times\frac{10\times 11}{2} + 10\times 385 \\
&= 13750
\end{aligned}$$

On rappel que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (on a aussi $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$)

Q13. Réponse B.

Toute fonction discontinue est non dérivable.

Q14. Réponse A.

On a $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x|$ alors $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Or la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0, alors si f' n'admet de limite en 0.

Donc la fonction f' n'est pas continue en 0.

($f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, car $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x|$).

Q15. Réponse B.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(x+2)\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)}$.

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-4\times\dfrac{\ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)}{\dfrac{x-1}{x+3}-1}\times\dfrac{x+2}{x+3}=-4$.

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)}{\dfrac{x-1}{x+3}-1}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{\ln(t)}{t-1}=1$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=e^{-4}$.

Q16. Réponse A.

On a $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$, $\dfrac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+3}{x+\sqrt{x}}\geq\dfrac{2}{x+\sqrt{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{x+\sqrt{x}}=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+3}{x+\sqrt{x}}=+\infty$.

Q17. Réponse C.

On pose $P(x)=(x-7)(x-5)(x+4)(x+6)-608$.

Donc $P(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)$, ainsi :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{4}r_i&=P(0)\\&=7\times5\times4\times6-608\\&=230\end{aligned}$$

Q18. Réponse B.

On a

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x\ln x}dx &= \int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x\ln x}dx \\ &= \int_e^{e^2} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln x} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\ln(\ln x) + \ln x \right]_e^{e^2} \\ &= 1+\ln 2\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x\ln x}dx &= \int_e^{e^2} \frac{(x\ln x)'}{x\ln x}dx \\ &= \left[\ln|x\ln x| \right]_e^{e^2} \\ &= 1+\ln 2\end{aligned}$$

Q19. Réponse A.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \sin(\pi x)dx &= \left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi^2}\left[x\sin(\pi x) \right]_0^1 - \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \sin(\pi x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi^2}\left[x\sin(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi^3}\left[\cos(\pi x) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi^2-4}{\pi^3}\end{aligned}$$

Q20. Réponse C.

On a $\begin{cases} J+I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \\ J-I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx = \left[\ln|\sin x + \cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$

Donc $I = J = \frac{\pi}{4}$.