Correction du Concours d'entrée en $1^{ère}$ année du cycle préparatoire

Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
2012-2013

Correction mathématique

Q1. On considère les événements : T : ‘‘l'élève ait mention très bien ’’

B : ‘‘l'élève ait mention très bien ’’

R : ‘‘l'élève ait mention très bien ’’

La probabilité qu'un élève n'ait ni la mention « très bien » ni la mention « bien » sachant qu'il a réussi le concours est :

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{T}\cap\overline{B}/R\right) &= \frac{P\left(\left(\overline{T}\cap\overline{B}\right)\cap R\right)}{P(R)} \\
&= \frac{P\left(R/\overline{T}\cap\overline{B}\right)\times P\left(\overline{T}\cap\overline{B}\right)}{P\left(R/\overline{T}\cap\overline{B}\right)\times P\left(\overline{T}\cap\overline{B}\right)+P(R/T)\times P(T)+P(R/B)\times P(B)} \\
&= \frac{0,2\times 0,25}{0,25\times 0,15+0,95\times 0,35+0,5\times 0,5} \\
&= 0,0489
\end{aligned}
$$

Q2. Formé un comité est choisir au hasard 3 mathématicien parmi 5 et un physicien parmi 4, alors le nombre de comités qu'on peut former est : $C_5^3\times C_4^1 = 40$

Q3. On a

donc

Or donc

].

Q4. On a :

$$
\begin{aligned}
2^3 \equiv -1[3] &\Rightarrow 2^{99} \equiv -1[3] \\
&\Rightarrow 2^{100} \equiv -2[3] \\
&\Rightarrow 2^{100}-1 \equiv 0[3]
\end{aligned}
$$

Donc $3\,|\,2^{100}-1$

Et on a :

$$\begin{aligned} 2^5 \equiv 1[31] &\Rightarrow 2^{100} \equiv 1[31] \\ &\Rightarrow 2^{100} - 1 \equiv 0[31] \end{aligned}$$

Donc $31 \mid 2^{100} - 1$

Q5. On a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{35} k^2 \\ &= \frac{35(35+1)(2\times 35+1)}{6} \\ &= 14910 \end{aligned}$$

Q6. Calculons la somme,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{35} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{35} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{35} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{35} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{36} \frac{1}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{36} \\ &= \frac{35}{36} \end{aligned}$$

Q7. On a $\forall k \in \{1;2;...;n\};\ 7k \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(7k) &= \frac{7}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{7}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(7k) = \frac{7}{2}$.

Q8. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On a :

$$\sqrt[n]{2+(-1)^n} = \left(2+(-1)^n\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$= e^{\frac{1}{n}\ln\left(2+(-1)^n\right)}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq 2+(-1)^n \leq 3$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\frac{1}{n}\ln\left(2+(-1)^n\right)\right| \leq \frac{\ln(3)}{n}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(2+(-1)^n\right) = 0$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} = e^0 = 1$

Q9. On a z_1, z_2 sont les solutions de l'équation complexe $z^2 = 5-12i$.

Alors $(z-z_1)(z-z_2) = z^2 - (5-12i)$

Alors $\begin{cases} -(z_1+z_2) = 0 \\ z_1 z_2 = 12i-5 \end{cases}$

D'autre part, on a $z_1 z_2 = Re(z_1)Re(z_2) - Im(z_1)Im(z_2) + i\left(Re(z_1)Im(z_2) + Im(z_1)Re(z_2)\right)$

Ainsi $Re(z_1)Im(z_2) + Im(z_1)Re(z_2) = 12$

Or $z_1 = -z_2$, alors $Re(z_1)Im(z_2) = Im(z_1)Re(z_2)$

D'où $Re(z_1)Im(z_2) = 6$

Q10. On a

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^{20}$$
$$= \sqrt{2}^{20}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20}$$
$$= 2^{10} e^{i\frac{35\pi}{3}}$$
$$= 2^{10} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Alors $Im(z) = -2^{10}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -215\sqrt{3}$

Q11. Calculons la limite suivante :

$$\lim_{n\to 0^+}\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}\ln(1+x)}=\lim_{n\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{3}\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{n\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{3}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}\times\frac{x}{\ln(1+x)}\ :$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Q12.On a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{\cos(2x)-1}\times\frac{\cos(3x)-1}{\ln(\cos(3x))}\times\frac{\cos(2x)-1}{\cos(3x)-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{\cos(2x)-1}\times\frac{\cos(3x)-1}{\ln(\cos(3x))}\times\frac{-2\sin^2(x)}{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{\cos(2x)-1}\times\frac{\cos(3x)-1}{\ln(\cos(3x))}\times\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\times\left(\frac{\frac{3x}{2}}{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}\right)^2\times\frac{4}{9}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(2x))}{\cos(2x)-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t)}{t-1}=1$, de même $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-1}{\ln(\cos(3x))}=1$

Alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}=\dfrac{4}{9}$

Q13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x)+x^2}{\ln(x+x^2)}=1$

Q14. On a : $\displaystyle\int_0^3\frac{dx}{3+2^x}=\int_0^3\frac{dx}{3+e^{x\ln 2}}$

On pose $t=e^{x\ln 2}$, alors $dt=\ln 2e^{x\ln 2}dx=t\ln 2dx$

Donc $dx=\dfrac{dt}{t\ln 2}$. Et $x=0\Rightarrow t=1$ et $x=3\Rightarrow t=2^3$.

Alors

$$\int_0^3 \frac{dx}{3+2^x} = \frac{1}{\ln 2}\int_1^{2^3} \frac{dt}{t(t+3)}$$
$$= \frac{1}{3\ln 2}\int_1^{2^3}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+3}\right)dt$$
$$= \frac{1}{3\ln 2}\left(\left[\ln t\right]_1^{2^3} - \left[\ln(t+3)\right]_1^{2^3}\right)$$
$$= \frac{1}{3\ln 2}\left(\ln 8 - \ln 11 + \ln 4\right)$$
$$= 1 - \frac{\ln 11}{\ln 8} + \frac{\ln 4}{\ln 8}$$
$$= 1 - \frac{\ln 11}{\ln 8} + \frac{2}{3}$$
$$= \frac{5}{3} - \frac{\ln 11}{\ln 8}$$

Q15. On a

$$\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx = \left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$
$$= \left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 + 2\left[\arctan(x) - x\right]_0^1$$
$$= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

Q16. On pose $\sin t = x$, alors $dx = \cos t dt$

Donc $x = 0 \Rightarrow t = 0$ et $x = \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Alors :

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\left|\cos t\right|\cos t dt$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(2t)\,dt$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos(4t)\right)dt$$
$$= \frac{1}{8}\left[t - \frac{1}{4}\sin(4t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{16}$$

Q17. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

On a $d\left(C,(AB)\right) = CH = \sqrt{AC^2 - AH^2}$.

D'autre part, on a $\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\right| = AB \times AH$, Donc $AH = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{AB}$.

Et puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 30$, $AB = \sqrt{9^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$,

alors : $d\left(C,(AB)\right) = \sqrt{20 - \left(\dfrac{30}{3\sqrt{10}}\right)^2} = \sqrt{10}$

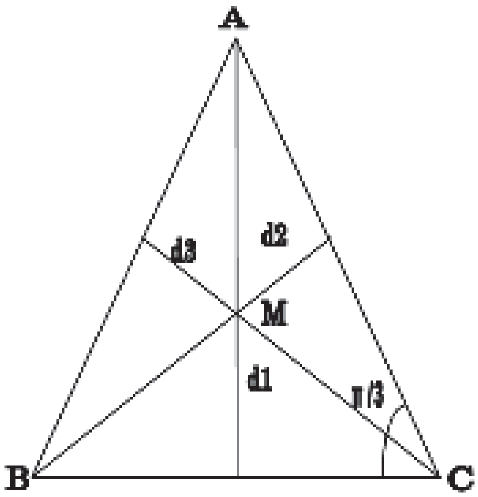
Q18. La surface du triangle (ABC) est : S= ———

— – donc – donc $\sqrt{3}$ ——— = $\times\sqrt{3}$ ———

D'autre part ——— ——— ———

Comme —

Alors — $\times\sqrt{3}$ ——— donc $\sqrt{3}$ ——— $\sqrt{3}$ $4\sqrt{3}$ ———



Q19. On a H_1 et H_2 deux sous espaces vectoriel de E distincts tels que $\dim E = 4$ et $\dim H_1 = \dim H_2 = 3$, alors H_1 et H_2 sont deux hyperplans de l'espace vectoriel E

$\dim\left(H_1 \cap H_2\right) = \dim E - 2 = 2$

Q20. On a $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3+\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A}$

Alors $B^{13}=\left(I_3+A\right)^{13}=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^{k}A^{k}\left(I_3\right)^{13-k}=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^{k}A^{k}$

On a $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, donc $A^3=0$, ainsi $\forall k\geq 3, A^k=0$

Alors $B^{13}=C_{13}^{0}A^{0}+C_{13}^{1}A+C_{13}^{2}A^{2}=I_3+13A+78A^2$.

D'où $B^{13}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&13&13\\0&0&13\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&78\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&13&91\\0&1&13\\0&0&1\end{pmatrix}$

Correction du Concours d’entrée en 1ère année du cycle préparatoire

Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
2012-2013

Fiche de réponses

Epreuve de Mathématique (Durée 1h : 30min)

Nom :……………………………………………
Prénom :……………………………………….. Note …………………….
C. N. E. :……………………………………….
N° d’examen : …………………………………

Remarques Importantes :

1) La documentation, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
2) Parmi les réponses proposées il n’y en a qu’une qui est juste.
3) Cochez la case qui correspond à la réponse correcte sur cette fiche.
4) Réponse juste = 1 point ; Réponse fausse = - 1 point ; Pas de Réponse = 0 point.
Noter Bien : Plus qu’une case cochée = - 1 point.

	A	B	C	D
Q1		×		
Q2			×	
Q3				×
Q4				×
Q5			×	
Q6		×		
Q7		×		
Q8	×			
Q9	×			
Q10		×		
Q11	×			
Q12			×	
Q13		×		
Q14				×
Q15				×
Q16				×
Q17		×		
Q18			×	
Q19			×	
Q20				×

R^+	R^-