Royaume du Maroc
Ministère de l'Education Nationale
du Préscolaire & des Sports

**CENTRE REGIONAL DES METIERS DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION**

..................................................

# CONCOURS D'ACCES A LA PREMIERE ANNEE DU CYCLE DE PREPARATION A L'AGRÉGATION DE MATHEMATIQUES

**Session : 2024-2025**

**Epreuve : ALGEBRE ET GÉOMÉTRIE**
**Durée : 4 heures** **Coefficient : 2**

## CONSIGNES

• Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction ;

• Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre ;

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats ;

• L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*L'épreuve est constituée d'un exercice et un problème indépendants. L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.*

## Exercice : (Système de congruences)

Soient $m$ et $n$ deux entiers supérieurs ou égal à 2.
Soit $k$ un entier non nul. On note, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\bar{x}_k$ la classe d'équivalence de $x$ dans $\mathbb{Z} \backslash k\mathbb{Z}$.

### Partie 1 : Théorème des restes de chinois

Dans cette partie on suppose que $\operatorname{pgcd}(m, n) = 1$. On considère le morphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x &\mapsto (\bar{x}_m, \bar{x}_n) \end{aligned}$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker}(\tilde{\varphi})$.
2. En déduire un isomorphisme d'anneau $\varphi : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ ; on considère le système :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x \equiv a & [m] \\ x \equiv b & [n] \end{cases}$$

   (a) Déterminer $\varphi(\bar{x}_{mn})$ si $x$ est solution de (S).

   (b) A l'aide du théorème de Bezout, déterminer $\varphi^{-1}(\bar{1}_m, \bar{0}_n)$ et $\varphi^{-1}(\bar{0}_m, \bar{1}_n)$.

   (c) Résoudre (S) dans $\mathbb{Z}$.

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x \equiv 6 & [12] \\ x \equiv 13 & [19] \end{cases}$$

### Partie 2 : Cas général

On veut étudier un système de congruences comme dans la partie précédente, mais dans le cas où le $\operatorname{pgcd}(m, n) = \delta \geqslant 2$. On notera $\mu$ le ppcm de $m$ et $n$.

On considère le morphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x &\mapsto (\bar{x}_m, \bar{x}_n) \end{aligned}$$

5. Déterminer $\operatorname{Ker}(\tilde{\varphi})$.
6. En déduire un morphisme injectif $\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, que l'on notera $\varphi$ dans la suite.
7. On suppose que $r$ et $s$ sont deux entiers tels que $r$ divise $s$. Montrer que le morphisme de $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ qui envoie $\bar{x}_s$ sur $\bar{x}_r$ est bien défini, c'est-à-dire, ne dépend pas du représentant $x$ de $\bar{x}_s$ choisi dans $\mathbb{Z}$.
8. En déduire que l'on définit un morphisme $\psi$ par

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z} \\ (\bar{x}_m, \bar{y}_n) &\mapsto \bar{x}_\delta - \bar{y}_\delta \end{aligned}$$

   et que celui-ci est surjectif. Montrer que $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \operatorname{Ker}(\psi)$ et en déduire l'égalité $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\psi)$

9. Montrer que le système suivant n'a pas de solution :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x \equiv 2 & [21] \\ x \equiv 11 & [35] \end{cases}$$

10. On suppose que $a$ et $b$ vérifient $\bar{a}_\delta = \bar{b}_\delta$. On veut résoudre le système

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x \equiv a & [m] \\ x \equiv b & [n] \end{cases}$$

Soit $u, v$ deux entiers tels que $um + vn = \delta$.

(a) Montrer que $x_0 := \frac{1}{\delta}(avn + bum)$ est solution du système.

(b) En déduire l'ensemble des solutions de (S).

11. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x \equiv 3 & [21] \\ x \equiv 10 & [35] \end{cases}$

## Problème :

### Notations :

Pour $p$ et $q$ entiers de $\mathbf{N}$, avec $p \leqslant q$, $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris au sens large entre $p$ et $q$.

E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n, n \geqslant 2$, sur le corps $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbf{C}$.

$\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$ de degré $\leqslant n-1$.

Dans tout le problème $f$ désigne un endomorphisme de E ; on a $f^2 = f \circ f$ et de même $f^{k+1} = f^k \circ f$ ; I désigne l'identité et 0 désigne l'application nulle. Par convention, $f^0 = \mathrm{I}$.

Si $\mathrm{R} \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{R}(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$, on note $\mathrm{R}(f)$ l'endomorphisme $a_0 \mathrm{I} + a_1 f + \cdots + a_p f^p$.

On note alors $\mathbb{K}[f]$ l'algèbre des polynômes de $f$, c'est-à-dire $\mathbb{K}[f] = \{\mathrm{R}(f) \mid \mathrm{R} \in \mathbb{K}[X]\}$.

On note $\mathrm{P}_f = \det(X\mathrm{I} - f)$ le polynôme caractéristique de $f$ et on rappelle que $\mathrm{P}_f(f) = 0$.

Pour une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note ${}^t\mathrm{M}$ la transposée de M. On définit aussi le polynôme caractéristique de M par $\mathrm{P_M} = \det(X\mathrm{I}_n - \mathrm{M})$ où $\mathrm{I}_n$ est la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que $f$ est cyclique si, et seulement si, il existe $x_0$ dans E tel que $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E.

On appelle commutant de $f$ l'ensemble $\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid f \circ g = g \circ f\}$, où $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ est l'ensemble des endomorphismes de E.

On admettra que $\mathscr{C}(f)$ est une algèbre de dimension au moins $n$ sur $\mathbb{K}$.

$\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles d'ordre $n$ sur $\mathbb{K}$.

### Partie 1 : Matrice compagne d'un endomorphisme cyclique.

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Montrer que M et ${}^t\mathrm{M}$ ont même spectre.

(b) Montrer que ${}^t\mathrm{M}$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

2. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de $C_Q$.

3. Soit $\lambda$ une valeur propre de ${}^tC_Q$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

4. Montrer que $f$ est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme $C_Q$, où Q est un polynôme unitaire de degré $n$. Dans ce cas montrer que Q est $P_f$.
On appel $C_{P_f}$ la matrice compagne de $f$.

5. Soit $f$ un endomorphisme cyclique. Montrer que $f$ est diagonalisable si et seulement si $P_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines sont simples.

## Partie 2 : Endomorphismes nilpotents.

6. On suppose dans cette question $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Montrer que $f$ est cyclique et déterminer sa matrice compagne. Quelle est la dimension du noyau de $f$ ?

7. On suppose maintenant $f$ nilpotent ; c'est-à-dire qu'il existe un entier $p$ supérieur ou égal à 2 tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.
On pose pour $k \in [\![1, p]\!], N_k = \ker f^k$ et $n_k = \dim N_k$.
On suppose également que $n_1 = 1$.
   (a) Montrer que $\forall k \in [\![1, p-1]\!], N_k \subset N_{k+1}$ et $f(N_{k+1}) \subset N_k$.
   (b) En considérant l'application $\varphi : \left| \begin{array}{l} N_{k+1} \to N_k \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$ montrer que : $\forall k \in [\![1, p-1]\!], n_k \leqslant n_{k+1} \leqslant n_k + 1$.
   (c) On suppose que $n_k = n_{k+1}$. Montrer par récurrence que : $\forall j \geqslant k, N_j = N_k$.
   (d) En déduire que $p = n$ et déterminer $n_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
   (On pourra remarquer que s'il existe un $k \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $n_k = n_{k+1}$, on aura $N_p = N_{p-1}$.)

## Partie 3 : Une caractérisation des endomorphismes cycliques.

8. Montrer que si $f$ est cyclique, alors $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

On suppose, dans la suite cette partie, que $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que $f$ est cyclique.

9. Dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On factorise le polynôme caractéristique $P_f$ de $f$ sous la forme :

$$P_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les $\lambda_k$ sont les $p$ valeurs propres distinctes de $f$, et les $m_k$ dans $\mathbb{N}^*$ leur ordre respectif de multiplicité. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $E_k = \ker((f - \lambda_k I)^{m_k})$.

(a) Montrer que les sous-espaces vectoriels $E_k$ sont stables par $f$ et que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

(b) Pour $k \in [\![1,p]\!]$, on note $\varphi_k$ l'endomorphisme $\varphi_k : \left| \begin{array}{l} E_k \to E_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{array} \right.$

Déterminer $\varphi_k^{m_k}$. Quelle est la dimension de $E_k$ ? Montrer que $\varphi_k^{m_k-1}$ n'est pas l'endomorphisme nul.

(c) En déduire l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle $f$ a une matrice «diagonale par blocs », ces blocs appartenant à $\mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{C})$, et étant de la forme : $\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$

(On pourra utiliser la partie 2).

(d) En utilisant $C_{P_f}$ montrer que $f$ est cyclique. Conclure ;

10. On suppose, dans cette question uniquement, que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(a) Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels qu'il existe $Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A = QBQ^{-1}$. On écrit $Q = Q_1 + iQ_2$ avec $Q_1$ et $Q_2$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid Q_1 + \lambda Q_2 \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})\}$ est non vide, puis en déduire que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $f$ est cyclique. Conclure.

## Partie 4 : Une autre caractérisation des endomorphismes cycliques.

11. On suppose $f$ cyclique et on choisit $x_0$ dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

(a) Soit $g \in \mathscr{C}(f)$. En écrivant $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)$, montrer que $g \in \mathbb{K}[f]$.

(b) Montrer que $g \in \mathscr{C}(f)$ si, et seulement si, il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

12. On suppose que $\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]$. Montrer que $f$ est cyclique. Conclure.